

一、多重選擇題：30% (每題 6 分) (多或少一個答案給 4 分, 多或少二個以上答案不予給分)

1. 設 $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 1)$ 兩點對於平面 $ax+by+cz=1$ 成對稱, 選出正確的選項:

- (A) $a = \frac{1}{4}$ (B) $b = \frac{3}{4}$ (C) $c = \frac{1}{2}$ (D) $a+b+c=1$ (E) \overline{AB} 的中點在平面上。

2. 設坐標空間中三條直線 L_1, L_2, L_3 的方程式分別為 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+4}{8}$; $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+4}{4}$;

$L_3: \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ 。試問下列哪些選項是正確的?

(A) L_1 與 L_2 相交

(B) L_2 與 L_3 平行

(C) 點 $P(0, -3, -4)$ 與 $Q(0, 0, 0)$ 的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離

(D) 直線 $L: \begin{cases} x=0 \\ \frac{y+3}{4} = \frac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1, L_2 皆垂直

(E) 三直線 L_1, L_2, L_3 共平面。

3. 設 $a_1:b_1:c_1 \neq a_2:b_2:c_2$ 。已知方程組 $\Gamma_1: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 有解 $(4,5,6)$, 方程組

$\Gamma_2: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 有解 $(1,2,3)$, 試問下列哪些選項亦是方程組 Γ_2 的解?

- (A) $(7,8,9)$ (B) $(5,7,9)$ (C) $(3,3,3)$ (D) $(-3,-3,-3)$ (E) $(2,1,0)$

4. 設 c 為實數, E_1, E_2, E_3 皆為坐標空間中的平面, 其方程式如下:

$$E_1: cx+y=c, E_2: cy+z=0, E_3: x+cz=1$$

已知 E_1, E_2, E_3 有一個交點的 z 坐標為 1, 請選出正確的選項。

(A) $(1, 0, 0)$ 是 E_1, E_2, E_3 的一個交點

(B) E_1, E_2, E_3 有無窮多個交點

(C) E_1, E_2, E_3 中一定有兩個平面重合

(D) $c=1$

(E) E_1, E_2, E_3 有一個交點的 z 坐標為 2

5. 設 a 為不等於零的實數。關於方程組
$$\begin{cases} ax + y + \frac{z}{a} = 1 \\ x + ay + z = -1 \\ \frac{x}{a} + y + az = 1 \end{cases}$$
 的解，下列選項哪些是正確的？
- (A) 當 $a=3$ 時，無解； (B) 當 $a=1$ 時，恰有一組解；
 (C) 當 $a=\frac{1}{2}$ 時，恰有一組解； (D) 當 $a=-1$ 時，有無限多組解
 (E) 當 $a=-4$ 時，有無限多組解

二、填充題：40% (每題 5 分)

1. 設 $A(1, 0, -1)$, $B(0, 1, -2)$, $C(2, 3, 0)$, 則 $\triangle ABC$ 的垂心坐標為_____。

2. 兩平面 $x+2y+3z+1=0$ 、 $3x+y-2z-1=0$ 之銳角的角平分面方程式為_____。

3. 已知 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$, 試求 \overline{AB} 在平面 $E: x-y+z=1$ 上的正射影長為_____。

4. 求過 $A(1, 0, 0)$ 且與直線 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ 垂直的直線方程式為_____。
 (須以對稱比例式表示)。

5. 設 $L_1: \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases}$, $L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$, 則 L_1 與 L_2 的距離為_____。

6. 設直線 L 通過 $A(5, -3, 6)$, $B(5, 0, 3)$ 兩點, 又 L 在平面 $E: 2x - y + 2z = 7$ 之正射影的直線方程式為 $\frac{x-a}{c} = \frac{y-b}{d} = \frac{z-1}{1}$, 試求序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 設 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{2}$, $L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-5}{-6}$, 則 L_1, L_2 之銳夾角平分線方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
(須以對稱比例式表示)。

8. 2014 年 7 月 17 日馬航 MH17 客機在烏克蘭東部上空被親俄武裝份子導彈擊落, 機上 298 人無一生還, 引起全球公憤, 同聲譴責恐怖份子。假設馬航客機的航線是 $\frac{x-5}{-7} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{a}$, 導彈發射時的座標是 $(4, 2, 1)$, 沿著方向向量 $(3, -1, 2)$ 發射出去, 已知馬航客機不幸被擊中, 且客機被擊中時的座標為 (b, c, d) , 則序組 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、計算題：30 分

1. 客機長途飛行時需落地加油一次, 機長必須選擇最短航線以節省燃料。機長在座標 $A(2, -3, 5)$ 準備降落到地平面(xy 平面)的 C 點加油, 加完油後需飛到座標 $B(3, 0, 10)$ 再飛後續航程, 若 C 點可為 xy 平面上任一點, 則當航線 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 為最小時, C 點座標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(5 分)

2. 設 $A(7, 6, 3), B(5, -1, 2)$, 直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$, P 在 L 上, 當 $P = \underline{\hspace{2cm}}$ 時, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。(5 分, 5 分)

3. 試就 a 值討論下述三平面的相交狀況：
$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 1 \\ 2x + ay + 3z = 1 \text{ (需就 } a \text{ 值寫出交點坐標、交線參數式, 15 分)} \\ 2x + 3y + az = 1 \end{cases}$$

高雄中學 103 學年度下學期 高二數學科(1~18 組) 第一次期中考 答案卷

高二 _____ 班 座號: _____ 姓名: _____

一、多重選擇題：30% (每題 6 分) (多或少一個答案給 4 分, 多或少二個以上答案不予給分)

1.	2.	3.	4.	5.
(B)(C)(D)(E)	(A)(B)(D)(E)	(B)(D)	(A)(B)(E)	(C)(D)

二、填充題：40% (每題 5 分)

1.	2.	3.	4.
$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$	$2x-y-5z-2=0$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\frac{x-1}{8} = \frac{y}{7} = \frac{z}{11}$
5.	6.	7.	8.
$\frac{7\sqrt{3}}{15}$	$(3, 1, -2, -2)$	$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-23} = \frac{z+1}{32}$	$(-1, -2, 4, -3)$

三、計算題：30 分 (需有詳細過程, 否則不給分)

<p>1. (5 分)</p> <p>Ans: $\left(\frac{7}{3}, -2, 0\right)$</p>	<p>3. (15 分)</p> <p>$\Delta = (a+5)(a-2)(a-3)$ (1 分)</p> <p>$\Delta_x = (a-2)(a-3)$ (1 分)</p> <p>$\Delta_y = (a-2)(a-3)$ (1 分)</p> <p>$\Delta_z = (a-2)(a-3)$ (1 分)</p> <p>Ans:</p> <p>(1) $a \neq 2, 3, -5$</p> <p>\emptyset 三平面交於一點 $\left(\frac{1}{a+5}, \frac{1}{a+5}, \frac{1}{a+5}\right)$ (3 分)</p> <p>(2) $a = -5$ \emptyset 三平面兩兩相交於一直線, 但三交線不共點 (2 分)</p> <p>(3) $a = 2$ \emptyset E_1、E_2 二平面重合, 而與另一平面 E_3 相交於一直線, 交線的參數式為 $x = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}t, y = t, z = t, t \in R$。 (3 分)</p> <p>(4) $a = 3$ \emptyset E_2、E_3 二平面重合, 而與另一平面 E_1 相交於一直線,</p>
<p>2. (5 分, 5 分)</p>	

交線的參數式為 $x=t, y=t, z=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}t, t \in R$ 。

(3分)

$$\text{Ans : } \left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), 3\sqrt{10}$$