高雄中學 103 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科　試題卷 （自然組）

命題範圍：高三數學 3-1 數列的極限、3-2 無窮等比級數、3-3 函數的概念

說明：請作答在答案卷上，須將答案填入正確欄位，否則不予計分。

一、是非題：判斷各題之敘述是否正確，正確請填 ○ ，錯誤請填 ╳ 。每題2分，共20分。

1．$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

2．若數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$皆發散，則數列$\langle a_n+b_n\rangle$必發散

3．若數列$\langle a_n\rangle$收斂，數列$\langle b_n\rangle$發散，則數列$\left\langle \dfrac{b_n}{a_n}\right\rangle$必發散

4．$0.\overline{8}+0.4\overline{1}=1.3$

5．設$a_n=\dfrac{5^n}{2^n+3^n+4^n}+(0.1)^n$，則$\langle a_n\rangle$為收斂數列

6．設數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$皆收斂且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，若每一自然數 n 都滿足$a_n<b_n$，則$a<b$

7．$f(x)=\dfrac{\sin x}{10^x+10^{-x}}$ 為偶函數

8．$f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$ 為奇函數

9．無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$發散

10．設 n、k 皆為正整數且 k＜5，則$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_k^n\times C_{5-k}^n}{C_5^n}=C_k^5$

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共 73 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
總得分	7	14	21	28	34	40	46	51	56	61	65	69	73

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}\right)=$ ＿(A)＿

2．$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}+\cdots=$ ＿(B)＿

3．坐標平面上，一個質點位於坐標原點 O，此質點依下列規則移動：第一次由坐標原點 $O(0,0)$移動到$A_1(5,0)$，之後每次移動方向皆為前一次移動方向向左轉$90°$，每次移動距離皆為前一次移動距離的$\dfrac{1}{2}$倍。設第 n 次移動之後到達的點為A_n，因此依序可得點$A_2(5,\dfrac{5}{2})$，$A_3(\dfrac{15}{4},\dfrac{5}{2})$，$A_4(\dfrac{15}{4},\dfrac{15}{8})$，⋯，則$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$坐標為 ＿(C)＿

4．$\langle a_n\rangle$為等比數列，已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=12$，則$a_1=$ ＿(D)＿

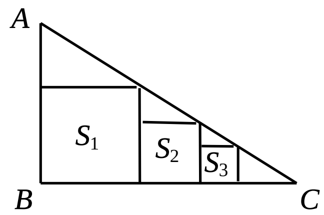
5. 設 a、$b\in R$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+2n}{n+1}-\dfrac{an^2+bn}{n+4})=2$，則 $a+b=$ (E)

6. 設 $n\in N$，a_n 表 12^n 之一切正因數之總和，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{12^n}=$ (F)

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}=$ (G)

8. 設 $f_1(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，規定函數 $f_{n+1}=f_1\circ f_n$，則 $f_{2015}(3)=$ (H)

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}})=$ (I)



10. 如右圖，$\triangle ABC$ 中，線段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 長度分別為 3、4、5，在 $\triangle ABC$ 中作一個內接正方形，其面積為 S_1，在此正方形的右邊，以 C 為頂點的空白三角形中，作一個內接正方形，其面積為 S_2。依此方式，連續不斷在以 C 點為頂點的空白三角形中作內接正方形，則所有這些正方形面積總和 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n+\cdots=$？ (J)

11. $f(x)$為多項式函數，設函數 $g(x)=f(x+1)-f(x)$，已知 $\forall x\in R$ 皆滿足 $g(x)=4x+1$，則 $f(x)=$ (K)

12. 設函數 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{(x+1)(x-2)}}$，則 $f(x)$的值域為 (L)

13. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n^2+n)^2}-\dfrac{2}{(n+1)^2}\right)=$ (M)

三、計算證明題：請使用黑色墨水的筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 7 分。

1. 證明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(1.01)^n}=0$ （提示：考慮 $(1+0.01)^n$ 展開式）

高雄中學 103 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科　答案卷 （自然組）

得　分

班級：3 年______組　　座號：______　　姓名：______________

一、是非題：判斷各題敘述是否正確，正確請填 ◯ ，錯誤請填 ╳ 。每題2分，共20分。

1.		2.		3.		4.		5.	
6.		7.		8.		9.		10.	

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共 73 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
總得分	*7*	*14*	*21*	*28*	*34*	*40*	*46*	*51*	*56*	*61*	*65*	*69*	*73*

(A)		(B)		(C)		(D)	
(E)		(F)		(G)		(H)	
(I)		(J)		(K)		(L)	
(M)							

三、計算證明題：請使用黑色墨水的筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 7 分。

1.

To：＿＿＿＿＿＿＿＿ 師，請指正。

高雄中學 103 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科 <<參考解答>> （自然組）

一、是非題：判斷各題敘述是否正確，正確請填 ○ ，錯誤請填 ╳ 。每題2分，共20分。

1.	╳	2.	╳	3.	○	4.	○	5.	╳
6.	╳	7.	╳	8.	○	9.	○	10.	○

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共 73 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
總得分	*7*	*14*	*21*	*28*	*34*	*40*	*46*	*51*	*56*	*61*	*65*	*69*	*73*

(A)	$-\frac{1}{2}$	(B)	2	(C)	(4,2)	(D)	3
(E)	4	(F)	3	(G)	1	(H)	－2
(I)	$\frac{1}{2}$	(J)	$\frac{48}{11}$	(K)	$2x^2-x+c$ ，$c\in R$	(L)	$[0,\frac{1}{3}]\cup[1,\infty)$ 也可以寫 $\left\{y\in R\,\middle|\,0\le y\le\frac{1}{3}\ or\ 1\le y\right\}$
(M)	$-\frac{3}{4}$						

三、計算證明題：請使用黑色墨水的筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 7 分。

1. 證明如下：

當 $n\ge 2$ 時，$(1+0.01)^n=1+C_1^n\times 0.01+C_2^n\times(0.01)^2+\cdots+C_n^n\times(0.01)^n\ge C_2^n\times(0.01)^2=\frac{0.0001\times n(n+1)}{2}$

因此 $0<\frac{n}{(1.01)^n}\le\frac{n}{\left(\frac{0.0001\times n(n+1)}{2}\right)}=\frac{20000}{n+1}$

又因為 $\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{20000}{n+1}=0$

由夾擠定理， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(1.01)^n}=0$ ，得證。