數學

高雄市立高雄高級中學 103 學年度下學期第二次期中考
數學科題目卷

填充題 10 格，每格 7 分，共 70 分

1. 取一個均勻的骰子連續投擲九次，將出現的點數依序記錄為a_1、a_2、a_3、…、a_9，試問$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$形成對稱矩陣的機率

2. 若x、y滿足方程組$\begin{bmatrix} \cos 10^\circ & -\sin 10^\circ \\ \sin 10^\circ & \cos 10^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 50^\circ & -\sin 50^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$，試求數對$(x, y)$

3. 若$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} -1 & 9 & 8 \\ 7 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，若$C=A^4+BA^3$，試求矩陣$C$的所有元之總和

4. 設$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$，若$A^{10}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，試求$(a_{11}-a_{12})(a_{21}-a_{22})$之值

5. 已知I_2為二階單位方陣，若$(A+I_2)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，且$A^{100}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，試求$\log_2(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})$

6. 設$x, y, z \in \mathbb{R}$，若$A=\begin{bmatrix} -x & y \\ z & x \end{bmatrix}$、$\det A=3$、$B=2A+A^{-1}$，試求$\det B$

p1 1

本試卷題目卷 3 頁，答案卷 1 頁，共 4 頁

數學

7. 已知矩陣$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right]$經過基本列運算後得矩陣$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2\cdot10^{-4} & 5 \\ 0 & 2 & -2\cdot10^{-4} & 3 \end{array}\right]$,

若 x、y 滿足方程組$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=10^4 \\ a_{21}x+a_{22}y=-2 \end{cases}$，試求數對$(x, y)$

8. 已知$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，若$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=2 \\ a_{21}x+a_{22}y=7 \end{cases}$的解為$x=3$、$y=5$,

試求兩直線$L_1: b_{11}x+b_{12}y=3$、$L_2: b_{21}x+b_{22}y=5$的交點坐標？

9. 實驗室的一個細菌培養皿中有 A、B 兩種乳酸菌各佔一半，為了控制變因，在實驗的過程中，
第一個小時會將培養皿維持在35°C，接下來第二個小時則將培養皿維持在25°C，
然後持續維持這樣的溫度週期（奇數時段維持35°C，偶數時段維持25°C）
根據過去長期的統計結果得知，

(1) 在35°C的環境一小時之後，A 乳酸菌有60%的機率會轉變成 B 乳酸菌，40%的機率維持不變，同樣溫度下，B 乳酸菌有 20%的機率會轉變成 A 乳酸菌，80%的機率維持不變

(2) 在25°C的環境一小時之後，A 乳酸菌有 40%的機率會轉變成 B 乳酸菌，60%的機率維持不變，同樣溫度下，B 乳酸菌有 40%的機率會轉變成 A 乳酸菌，60%的機率維持不變

若每隔兩小時測量一次培養皿中 A 乳酸菌的比例，試問長期下來會趨近多少？

10. A 箱有 2 個白球，B 箱有 2 個紅球、C 箱有 1 個黑球，隨機投擲一個公正的骰子，
若點數出現 1 或 4，則從 A、B 箱各拿一顆球進行交換，一連交換 3 次
若出現其他點數，則從 A、C 箱各拿一顆球進行交換，一連交換兩次
試問 A 箱依舊擁有兩個白球的機率？

P.2

數學

高雄市立高雄高級中學 103 學年度下學期第二次期中考 數學科題目卷

多選題：共 30 分（全對每題給 10 分，答錯 1 個選項給 6 分，答錯 2 個選項給 2 分；未作答或答錯多於 2 個選項者，該題零分計算）

1. 已知$\Gamma:\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3 \end{cases}$為實係數三元一次方程組，若其係數矩陣為$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，

其增廣矩陣為$B=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right]$，而 B 在經過基本列運算之後得$C=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & D_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & D_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & D_3 \end{array}\right]$，

試問下列哪些選項正確？

(A) 若$D_3=0$，則方程組Γ有解

(B) 若c_{33}為無理數，則方程組Γ有解

(C) 若 A 有反方陣，則$c_{33}\neq 0$

(D) 若 A 沒有反方陣，則$c_{33}=0$

(E) 若$c_{33}\times D_1\times D_2\times D_3\neq 0$，則$d_1^2+d_2^2+d_3^2\neq 0$

2. 若 A、B、C 皆為二階方陣，試問下列哪些選項正確？

(A) 若$(AB)^T=A^TB^T$，則$AB=BA$　（其中A^T為 A 的轉置矩陣）

(B) 若$(AB)^2=A^2B^2$，則$AB=BA$

(C) 若$A=BAB^{-1}$，則$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

(D) 若 AC 有反方陣，且$ABC=AC$，則$B=I_2$　（I_2為二階單位方陣）

(E) 設$A=\begin{bmatrix} x & 3 \\ y & 8 \end{bmatrix}$，若$|xy|>xy$，則 A 有反方陣

3. 對於任意的二階方陣 M，定義$Tr(M)$表示 M 之主對角線之和，例如：$M=\begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 44 \end{bmatrix}$，

則$Tr(M)=11+44=55$。若 A、B、P 皆為二階方陣，試問下列哪些選項正確？

(A) 若 A 有反方陣，則$Tr(A^{-1})=Tr(A)$

(B) 若$\alpha\in\mathbb{R}$，則$Tr(\alpha A+B)=\alpha\cdot Tr(A)+Tr(B)$

(C) $Tr(AB)=Tr(BA)$

(D) 若 P 有反方陣，則$Tr(P^{-1}AP)=Tr(A)$

(E) 設$A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$，且$Tr(AB)=Tr(A)\cdot Tr(B)$

則$\cos(\alpha-\beta)=0$

P.3

高雄市立高雄高級中學 103 學年度下學期第二次期中考 答案卷

數學

二年___班.____號. 姓名：__________

填充題 10 格，每格 7 分，共 70 分

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

多選題：共 30 分（全對每題給 10 分，答錯 1 個選項給 6 分，答錯 2 個選項給 2 分；未作答或答錯多於 2 個選項者，該題零分計算）

1.	2.	3.

P.4