

高雄中學 103 學年度第二學期第二次期中考 高二第一類組數學科試題

一、填充題：請將答案依照題號填入答案卷之答案欄當中。(54%)

1. 已知矩陣 A 、 B 滿足 $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $A-B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A^2 - B^2 =$ _____。

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ ，試求滿足 $(A+I_2)(B+I_2) = A+B+2I_2$ 的二階方陣 $B =$ _____。

3. 試求出 $\begin{bmatrix} 30 & 62 & 94 \\ 42 & 90 & 138 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -99 & 8 & 2016 \\ \log 2 & \log 1 & \log \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 62 & 94 \\ 42 & 90 & 138 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & -10 & -2015 \\ \log 5 & 1 & \log \frac{1}{25} \end{bmatrix} =$ _____。

4. 有甲、乙、丙三支足夠大的瓶子，開始時三個瓶子分別裝有 a 公升、 b 公升與 c 公升的水。現在依照以下的方式操作：

每一輪操作都是先將甲瓶的水倒出一半到乙瓶，接著將乙瓶的水倒出一半到丙瓶，最後再將丙瓶的水倒出一半回

甲瓶。如果用矩陣 $X_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 代表開始時三個瓶子的水量，而 $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$ 代表操作 n 輪後的水量分布。

(1) 請寫出滿足 $X_n = A^n X_0$ 的三階轉移矩陣 $A =$ _____。

(2) 假設三個瓶子的總水量恰為 1 公升，今不斷地重複操作，當 n 趨向無限大時，三個瓶子的水量分布 X_n 會趨近唯一的矩陣 X ，請寫出這個穩定狀態下的矩陣 $X =$ _____。

5. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ，且 $B = A^{-1}PA$

(1) 試求矩陣 $B^9 =$ _____。

(2) 試求矩陣 $P^9 =$ _____。

6. 已知 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ，其中 $a_{ij} = i^2 + j$ 。又 $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ ，其中 $b_{ij} = (-1)^i + (-1)^j$ 。若 $C = A+B$ ，則矩陣 C 中一切元素之總和為 _____。

R-1

7. 情報員『老鬼』是某組織首領『老槍』的手下，在『老鬼』深入敵境潛伏的時候，首領『老槍』為了與『老鬼』聯絡，會在特定的報紙的廣告欄刊登訊息給予指令。為了避免訊息外洩，兩人約好用二位數字 01, 02, 03, ..., 26 分別表示英文字母 A, B, C, ..., Z, 並用 00 表示空格。同時選用一個二階方陣 $K = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 予以加密，例如現在『老槍』若要傳訊息「cover」，他會先將這個英文詞彙化為數字的二列矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ，並且用矩陣 K 加密變成 $B = KA = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 26 & 20 & 20 & 38 \\ 9 & 20 & 16 & 15 & 29 \end{bmatrix}$ ，再把矩陣 $B = \begin{bmatrix} 12 & 26 & 20 & 20 & 38 \\ 9 & 20 & 16 & 15 & 29 \end{bmatrix}$ 刊載在報紙上。當『老鬼』看到矩陣 B 後，只要利用約定好的加密矩陣 $K = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 進行解密，即可還原成矩陣 A 而得到訊息「cover」。
- 若某天早上『老鬼』在報紙上看到訊息 $C = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 12 & 4 & 12 & 10 & 0 & 16 & 20 & 30 & 26 & 12 \\ 3 & 10 & 10 & 3 & 9 & 8 & 0 & 12 & 15 & 23 & 20 & 10 \end{bmatrix}$ ，請問這表示什麼訊息？_____。

二、複選題：以下每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項填入答案卷之答案欄當中。(24%)

8. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$ 、 $A \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。請選出下列敘述中正確的選項。
- (1) $[1 \quad -2]A = [1 \quad 1]$ (2) $A + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\det(A) > 0$ (4) $A^2 - 6A = I_2$
- (5) $A^3 - 5A^2 - 5A + I_2 = 2(A + I_2)$

9. 設 A 、 B 、 C 均為二階方陣， O 為二階零方陣， I 為二階單位方陣，則下列敘述哪些恆成立？

- (1) $\det(kA) = k \det(A)$ ，其中 k 為實數 (2) 若 $AB = AC$ 且 $\det(A) \neq 0$ ，則 $B = C$
- (3) 若 $AB = BA$ ，則 $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ (4) 若 $AB = O$ ，則 $A = O$ 或 $B = O$ (5) 若 $A^2 = I$ ，則 $A = I$ 或 $A = -I$

10. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，且 $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，其中 n 為正整數，請選出正確的選項。

- (1) $(a_n + c_n)^n = a_1 + c_1$ (2) $b_{n+1} = 2b_n - 1$ (3) $d_{n+1} = 2d_n$ (4) AA^T 為對稱矩陣
- (5) $(A^n)(A^n)^T$ 為對稱矩陣

三、計算證明題：請在答案卷之答案欄當中寫出適當演算過程或理由。(22%)

1. 試利用矩陣的列運算，解聯立方程組 $\begin{cases} 3x - 2y + 6z = 8 \\ 5x - 2y + 12z = 10 \\ 2x - y + 5z = 6 \end{cases}$ 。(6%)

2. 所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：

(甲) 該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數 (乙) 該矩陣的每一行的數字相加都等於 1。

已知 $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{bmatrix}$ 均為 n 階轉移矩陣，而 $C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} = \frac{2A+3B}{5}$ 。試證明矩陣 C 也是轉移矩陣。(8%)

3. 令 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R(\theta)$ ，試證明 $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ 。(8%)

高雄中學 103 學年度第二學期第二次期中考 高二第一類組數學科答案卷

二年 _____ 組 座號 _____ 姓名 _____

一、填充題 & 二、複選題：請將正確選項填入答案卷之答案欄當中。(54%+24%)

1.	2.	3.	4.(1)
4.(2)	5.(1)	5.(2)	6.
7.	8.	9.	10.

三、計算證明題：請在答案欄當中寫出適當演算過程或理由。(22%)

1.	
2.	
3.	