高 雄 中 學 一 〇 三 學 年 度 第 二 學 期 第 二 次 段 考 高 三 數 學 科 題 目 卷 (自 然 組)

三年____班 ____號　姓名______________

※本份考卷中 $f'(x)$表示 $f(x)$的一階導函數；$f''(x)$ 為 $f(x)$的二階導函數

一、多重選擇題(每題至少有一個正確選項) (20%)

1. 關於函數 $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ 的敘述何者正確？

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$　(2) $f'(\frac{\sqrt{3}}{2})=1+\sqrt{3}$　(3) $f(x)$的最大值為$\sqrt{2}$　(4)當 $x=1$ 時，$f(x)$有極大值

(5)發生極值的點恰有 1 個

2. 下列關於函數 $f(x)$的敘述何者正確：

(1)設 $f(a)$ 存在，若 $x<a$ 時 $f'(x)<0$；而 $x>a$ 時 $f'(x)>0$，
則 f 在 $x=a$ 處有極小值 $f(a)$。

(2)若 $f'(c)=f''(c)=0$，則$(c, f(c))$不是 $f(x)$的反曲點。

(3)若在區間 (a, b) 內的一個數 c，使 $f'(c)=0$，則 $f(c)$ 是極值

(4)若在區間 (a, b) 內的一個數 c，使 $f(c)$ 是極值，則 $f'(c)=0$

(5)若函數 f 在 $x=c$ 處的一階導數 $f'(c)=0$，則此函數圖形在點 $(c, f(c))$ 處有一條水平切線。

3. 多項式函數 $f(x)=x^5+2x^4-x^3-5x^2+3$，試問下列何者正確？

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$　(2) $f'(x)=0$ 恰有兩實根　(3) $f''(x)=0$ 恰有一實根　(4) $f(x)=0$ 有三個相異實根

(5) 將 $f(x)$表示成 $a(x-1)^5+b(x-1)^4+c(x-1)^3+d(x-1)^2+e(x-1)+f$，其中 a,b,c,d,e,f 為常數，則 $d=14$

4. 函數 $f(x)$的一階導函數為 $f'(x)=10x(x^2+1)^4$，則下列何者正確？

(1) $f(x)$可能為$(x^2+1)^5+2015$

(2) $f(x)$為嚴格遞增函數

(3) $f(x)$的函數圖形沒有反曲點

(4)方程式 $f(x)=0$ 沒有實根

(5)若 $g(x)=(x+1)^5$，則 $g'(x^2)=f'(x)$

二、填充題(75%)

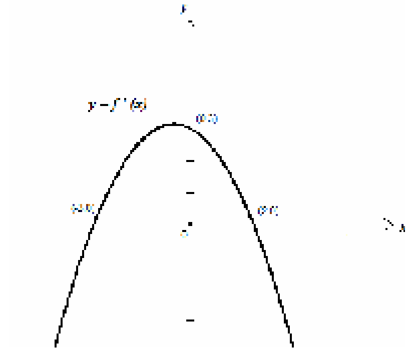
1. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+x+3$ 的圖形恰有一條水平切線，試求實數 a 之值。_________

2. $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x-5}$，試求一階導數 $f'(2)=$ _________

3. 可微分函數 $f(x)$ 滿足 $f(x)+(f(x))^2=x^4+3x^3+2$，且 $f(1)>0$。試求 $f'(1)=$ _________

4. 已知 $f(x+2)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$，試求**(1)** $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}+\dfrac{h}{f(1+2h)-f(1)}\right)=$ _________

(2) $\lim\limits_{a\to 0}\lim\limits_{b\to 0}\dfrac{f(1+a+b)-f(1+a)-f(1+b)+f(1)}{ab}=$ _________



5. $\deg f(x) = 3$，右圖為 $y = f'(x)$的圖形，圖形過$(2, 0)$、$(-3, 0)$、$(0, 3)$三點。試問：

(1) $f(x)$遞增範圍？(以開區間表示)_________

(2)若 $f(0) = 1$，求 $y = f(x)$之反曲點坐標 _________

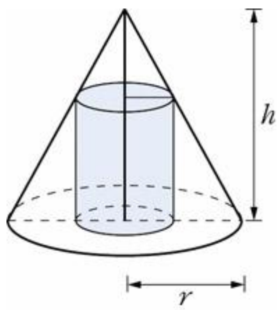
6. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{C_1^{10}+2C_2^{10}x+3C_3^{10}x^2+\cdots+10C_{10}^{10}x^9-5120}{x-1}=$ ____________

7. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}=$ ____________

8. a , b為實數，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-(4+a)x+2a}{(x-2)^2}, & x\neq2\\ a+b, & x=2\end{cases}$ 在$x = 2$連續，求序對(a, b) ____________

9. 設 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x + k$，$g(x) = x^3 + x^2 + 6x$。兩圖形在 y 軸右側有一交點；在 y 軸左側有兩相異交點。試求實數 k 值的範圍。__________

10. 設一直圓錐高為 h，底半徑為 r，有一直圓柱內接於此直圓錐，如圖所示。試求直圓柱之最大體積。_____________



11. 設 $f(x)$是三次多項式函數，且滿足$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=2$，試求 $f(x)$。_________(請展開化簡)

12. 設 P 點為 $f(x) = x^2 + 2x - 7$ 圖形外一點，已知過 P 點的切線有二條，其斜率分別為 3 及-5，試求 P 點的坐標。_________

三、證明題(5%)

1. 函數 $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$，$r > 0$，圖形上一點 $P(a, f(a))$，$a \neq \pm r$。試證明過 P 的切線方程式為
$y = f'(a)x + r\sqrt{(f'(a))^2 + 1}$

高雄中學一〇三學年度第二學期第二次段考高三數學科答案卷(自然組)

三年____班 ____號 姓名____________

一、多重選擇題：(20%)(每題 5 分，答錯 1 個選項得 3 分、答錯 2 個得 1 分、答錯 3 個以上或未作答皆不給分)

1.	**2.**	**3.**	**4.**
(1)(3)	(5)	(1)(2)(5)	(1)(3)

二、填充題：(75%)(請注意題號，寫錯格不給分。全對才給分)

計分標準：

格數	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
分數	8	16	24	32	38	44	50	55	60	64	68	71	73	75

1.	**2.**	**3.**	**4.(1)**
$\pm\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{5}$	$-\frac{17}{6}$
4.(2)	**5.(1)**	**5.(2)**	**6.**
-12	$(-3, 2)$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-13}{24}\right)$	23040
7.	**8.**	**9.**	**10.**
1	$(8, -2)$	$-7<k<0$	$\frac{4\pi hr^2}{27}$
11.	**12.**		
x^3-4x^2+6x-2	$\left(\frac{-3}{2}, \frac{-47}{4}\right)$		

三、證明題：(5%)

$\because f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$，$\therefore f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$，得 $f(a)=\sqrt{r^2-a^2}$ 且 $f'(a)=\frac{-a}{\sqrt{r^2-a^2}}$ $\Rightarrow a^2=\frac{r^2(f'(a))^2}{(f'(a))^2+1}$

過 P 的切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$，

$$\Rightarrow y=f'(a)x-af'(a)+f(a)=f'(a)x-a\frac{-a}{\sqrt{r^2-a^2}}+\sqrt{r^2-a^2}=f'(a)x+\frac{a^2+(r^2-a^2)}{\sqrt{r^2-a^2}}=f'(a)x+\frac{r^2}{\sqrt{r^2-a^2}}$$

$$=f'(a)x+\frac{r^2}{\sqrt{r^2-\frac{r^2(f'(a))^2}{(f'(a))^2+1}}}=f'(a)x+\frac{r}{\sqrt{\frac{1}{(f'(a))^2+1}}}=f'(a)x+r\sqrt{(f'(a))^2+1}$$