高 雄 中 學 一 〇 四 學 年 度 第 二 學 期 第 一 次 期 中 考 數 學 科 試 卷

※請用原子筆將答案填寫在答案卷上

一、填充題：共計 82 分(請按照題號作答，填錯格子不給分，每題完全答對才給分)

1.【單選】若 x 為實數，則下列何者$\boxed{\text{錯誤}}$？

(A)方程式 $x+3=2^{-x}$ 恰有一個實根

(B)方程式 $2^x=2\cdot x$ 恰有兩個實根

(C)方程式 $2^x=x^2$ 恰有兩個實根

(D)方程式 $2^{|x|}=x^2$ 恰有四個實根

(E)方程式 $2^{-|x|}=x^2$ 恰有兩個實根

2. 化簡 $(\frac{9}{25})^{-0.5}+\frac{10^{1+\sqrt{2}}}{(0.1)^{1-\sqrt{2}}}+(3^{\sqrt{2}})^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}+(\sqrt{5}+1)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\sqrt[5]{3^{20}}}$ ，其值為________。

3. 設 $x,y\in R$ ，若 $\sqrt[x]{243}=\sqrt[y]{3^{3y-6}}$ 且 $5^{3x+15y}=625^{xy}$,求 $x+y$ 之值為________。

4. 設數列〈a_n〉滿足遞迴定義式 $\begin{cases} a_1=10 \\ a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}, n\in N \end{cases}$ ，求 a_{2016} 之值為________。

5. 設數列〈a_n〉滿足遞迴定義式 $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=3a_n+8, n\in N \end{cases}$ ，則一般項 a_n 的通式為____________。(以 n 表示)

6. 設 x,y 為實數，若 $2^x=5^{2y}=(10)^{\frac{1}{5}}$ ，則 $\dfrac{x+2y}{xy}$ 之值為________。

7.設 $a=\sqrt{2}$ 、$b=\sqrt[3]{3}$ 、$c=\sqrt[4]{4}$ 、$d=\sqrt[5]{5}$ ，試比較 a、b、c、d 之大小關係為________。

8. 解不等式 $(0.3)^{x^2-3x}\le(0.09)^{2x+4}$

9. 解不等式 $(\frac{1}{4})^{x-1}+3(\frac{1}{2})^{x}-1<0$

10. 設$-2\le x\le3$，若 $2^{2x+1}-2^{x+3}+9$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M+m$ 之值為________。

11. 若指數方程式 $7^{x}-6\times7^{1+\frac{x}{2}}+343=0$ 的兩根為 a,b ，則兩根和 $a+b$ 之值為________。

12. 設 L_1,L_2 為平面上兩條平行線，且 L_1 和 L_2 均不通過 P 點，若平面上通過 P 點的 n 條直線最多將平面分割成 a_n 個區域，則 a_{20} 之值為________。

13. 設 $f(x)=\dfrac{k\cdot2^{x}+2^{-x}}{2^{x}-2^{-x}}$ ，且滿足 $f(a)=7,f(b)=9,f(a+b)=\dfrac{33}{7}$ ，求 k 之值為________。

14. 設數列〈a_n〉滿足遞迴定義式 $\begin{cases}a_1=2\\ n\cdot a_{n+1}=(n+1)\cdot a_n+2\ ,n\in N\end{cases}$ ，求 a_{50} 之值為_________。

二、計算證明題：共計 18 分(需列詳細計算過程才給分)

1. 請用數學歸納法證明：$a_n=2\cdot6^{2n+1}+4^{2n+3}+9^{2n+1}$ 是 5 的倍數，$n\in N$ 。【10 分】

2. 令 $4(4^{x-1}+4^{-x})-8(2^{x-1}+2^{-x})+7=0$ 為 $\boxed{\text{方程式(*)}}$

(1)令 $t=2^{x-1}+2^{-x}$ ，求 t 的範圍。【2 分】

(2)試將方程式(*)表成 t 的方程式。【2 分】

(3)試解方程式(*)，求其解 x 。【4 分】

高 雄 中 學 一 〇 四 學 年 度 第 二 學 期 第 一 次 期 中 考 數 學 科 答 案 卷

班級：________ 座號：________ 姓名：________________

一、填充題：共計 82 分(請按照題號作答，填錯格子不給分，每題完全答對才給分)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
分數	8	16	24	32	40	46	52	58	63	68	72	76	79	82

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.
9.	10.	11.	12.
13.	14.		

二、計算證明題：共計 18 分(需列詳細計算過程才給分)

1.	2.
	(1)
	(2)
	(3)

高雄中學一〇四學年度第二學期第一次期中考數學科答案

一、填充題：共計 82 分(請按照題號作答，填錯格子不給分，每題完全答對才給分)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
分數	8	16	24	32	40	46	52	58	63	68	72	76	79	82

1.	2.	3.	4.
C	119	8	$\frac{9}{11}$
5.	**6.**	**7.**	**8.**
$5\cdot 3^{n-1}-4$	10	$b>a=c>d$	$x\geq 8$ 或 $x\leq -1$
9.	**10.**	**11.**	**12.**
$x>2$	74	6	82
13.	**14.**		
3	198		

二、計算證明題：共計 18 分(需列詳細計算過程才給分)

1.

(1)當 $n=1$ 時，$a_1=2\cdot 6^{2+1}+4^{2+3}+9^{2+1}=2185=5\times 437$，所以 $n=1$ 時成立

……………………………………………………………【答對至此共給 2 分】

(2)設 $n=k$ 時成立，即 $a_k=2\cdot 6^{2k+1}+4^{2k+3}+9^{2k+1}=5t(t\in N)$

……………………………………………………………【答對至此共給 4 分】

則當 $n=k+1$ 時，$a_k=2\cdot 6^{2(k+1)+1}+4^{2(k+1)+3}+9^{2(k+1)+1}$

$=2\cdot 6^{2k+3}+4^{2k+5}+9^{2k+3}$

$=72\cdot 6^{2k+1}+16\cdot 4^{2k+3}+81\cdot 9^{2k+1}$

$=16(2\cdot 6^{2k+1}+4^{2k+3}+9^{2k+1})+40\cdot 6^{2k+1}+65\cdot 9^{2k+1}$

$=16(5t)+40\cdot 6^{2k+1}+65\cdot 9^{2k+1}$

$=5(16t+8\cdot 6^{2k+1}+13\cdot 9^{2k+1})$ 亦為 5 的倍數

……………………………………………………………【答對至此共給 9 分】

由數學歸納法得證：$a_n=2\cdot 6^{2n+1}+4^{2n+3}+9^{2n+1}$ 是 5 的倍數，$n\in N$。

……………………………………………………………【答對至此共給 10 分】

2.

(1)

(1)由算幾不等式 $\frac{2^{x-1}+2^{-x}}{2}\geq\sqrt{(2^{x-1})(2^{-x})}=\sqrt{2^{-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore t=2^{x-1}+2^{-x}\geq\sqrt{2}$

(2)

$\because 4^{x-1}+4^{-x}=(2^{x-1}+2^{-x})^2-2\cdot 2^{x-1}\cdot 2^{-x}=t^2-1$

$\therefore 4(4^{x-1}+4^{-x})-8(2^{x-1}+2^{-x})+7=0$

$\Rightarrow 4(t^2-1)-8(t)+7=0$

$\Rightarrow 4t^2-8t+3=0$

(3)

$4t^2-8t+3=0\Rightarrow t=\frac{3}{2},\frac{1}{2}$ ($\because t\geq\sqrt{2}$ $\therefore t=\frac{1}{2}$ 不合)

$\therefore t=2^{x-1}+2^{-x}=\frac{3}{2}$【同乘以 $2\cdot(2^x)$】

$\Rightarrow (2^x)^2-3(2^x)+2=0$

$\Rightarrow 2^x=1$ 或 2

$\Rightarrow x=0$ 或 1