

高雄中學 104 年度第二學期 第一次期中考 三年級 自然組

數學科

班別： 姓名：

座號：

一、是非題：(30%，每題 2 分)

甲. 有二無窮數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ ，對 $\forall n \in \mathbf{N}$ ， a_n, b_n 均為正數。下列敘述一定正確的請劃『O』，否則請劃『X』？

- (1) 若 $\langle a_n \rangle$ 收斂， $\langle b_n \rangle$ 收斂，則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂
- (2) 若 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂， $\langle b_n \rangle$ 收斂，則 $\langle a_n \rangle$ 收斂
- (3) 若 $\langle a_n b_n \rangle$ 收斂， $\langle b_n \rangle$ 收斂，則 $\langle a_n \rangle$ 收斂
- (4) 若 $\langle a_n \rangle$ 收斂， $\langle b_n \rangle$ 發散，則 $\langle a_n - b_n \rangle$ 發散
- (5) 若 $\langle \frac{b_n}{a_n} \rangle$ 收斂， $\langle b_n \rangle$ 發散，則 $\langle a_n \rangle$ 發散
- (6) 若 $\langle a_n \rangle$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂
- (7) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\langle a_n \rangle$ 收斂
- (8) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收斂
- (9) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ 收斂
- (10) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$ 收斂

乙. 下列各函數，在 $x=0$ 處連續者請劃『O』，否則請劃『X』？（註[•]表高斯符號）

- (1) $f_1(x) = |x|$
- (2) $f_2(x) = [x]$
- (3) $f_3(x) = [[x] - x]$
- (4) $f_4(x) = [x - [x]]$
- (5) $f_5(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$

二、填充題：(49%)(每提 7 分)

1. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n+1}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{3n+1})}$ 。

2. 試求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\mathbf{L}(1+9x)(1+10x) - 1}{x}$ 。

3. 無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 2016$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n + 105}{2}$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

4. 設三次方程式 $x(x+5)(x-5) + 0.15 = 0$ 的三個實根由小而大依序為 a, b, g ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a^n + 2b^n + g^n}{a^n + b^n + g^n}$ 。

5. 設 $a \in \mathbf{R}$ 。若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x^2-2}-2}{x-2}$ 收斂至 A ，試求數對 (a, A) 。

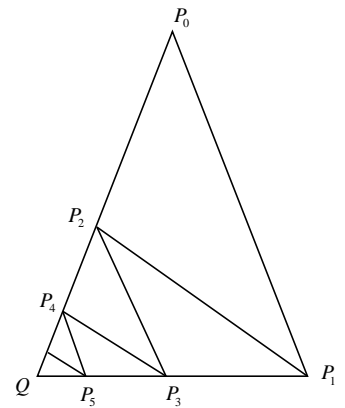
6. 設無窮級數 $1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \mathbf{L} + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \mathbf{L}$ 的和為 S ，其前 n 項和為 S_n 。若欲使 $|S_n - S| < 10^{-10}$ ，試問 n 的最小正整數為何？（ $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ）

7. 如右圖所示， $\triangle P_0QP_1$ 是頂角 $\angle QP_0P_1 = 36^\circ$ ，腰長 $\overline{P_0Q} = \overline{P_0P_1} = 1$ 的黃金三角形。

現作 $\angle P_0P_1Q$ 的角平分線交 $\overline{P_0Q}$ 於 P_2 ，再作 $\angle P_1P_2Q$ 的角平分線交 $\overline{P_1Q}$ 於 P_3 ，如此

繼續下去作無限多次，使 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 為 $\angle P_{n-1}P_nQ$ 的角平分線， $n = 1, 2, 3, \mathbf{L}$ 。試求

$\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \mathbf{L} + \overline{P_{n-1}P_n} + \mathbf{L}$ 的值。（ $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ， $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ）



三、計算證明題：(21%)

1. (1) 試以夾擠定理證明： $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$ (7分)

(2) 試求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{p}{3}) - \sin \frac{p}{3}}{x}$ (7分)

2. 試將循環小數 $0.3\bar{8}$ 化為 $\frac{b}{a}$ 的形式，其中 $a, b \in \mathbf{N}$ ， $(a, b) = 1$ ；並以無窮等比級數的觀念證明之。(7分)

高雄中學 104 年度第二學期 第一次期中考 三年級 自然組

數學科

班別： 姓名：

座號：

一、是非題(30%，每題 2 分)

甲	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
乙	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)					

二、填充題(49%，每題 7 分)：

1	2	3	4
5	6	7	

三、計算證明題(21%)：

1
2

高雄中學 104 年度第二學期 第一次期中考 三年級 自然組

數學科

班別： 姓名：

座號：

四、是非題(30%，每題 2 分)

甲	(1) O	(2) O	(3) X	(4) O	(5) O	(6) X	(7) O	(8) O	(9) O	(10) X
乙	(1) O	(2) X	(3) X	(4) O	(5) X					

五、填充題(49%，每題 7 分)：

1	$-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$	2	55	3	105	4	3
5	$(\sqrt{2}, 2)$	6	60	7	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		

六、計算證明題(21%)：

1	(1) 略 (2) $\frac{1}{2}$
2	$\frac{7}{18}$ ，證明略。