

高雄中學 104 學年度第二學期第三次期中考 高二自然組 數學科試題卷

一、單選題：

1. 設矩陣 $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{p}{10} & -\sin \frac{p}{10} \\ \sin \frac{p}{10} & \cos \frac{p}{10} \end{bmatrix}$, 則 $\sum_{n=1}^{519} A^n =$

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. 設兩方陣 A, B 滿足 $A+B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 則 $a+b+c+d =$

(1)-8 (2)-10 (3)-12 (4)-14 (5)-16

3. 設 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $PB=AP$, 則 $A^{10} =$

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1023 & -1024 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1023 & 1024 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1023 & 1024 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1023 & 1024 \end{bmatrix}$

二、多選題：

4. 假設 A, B, C 均為二階方陣, I 是 2 階單位方陣, $\det(ABC) \neq 0$, 則下列各敘述何者正確?

(1) 若 $AB=AC$, 則 $B=C$

(2) 若 $ABC=I$, 則 $(AB)^{-1}=C$

(3) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

(4) $(A+A^{-1})^2=A^2+(A^2)^{-1}+2I$

(5) $\det(2A)=2\det(A)$

5. 設 A, B, C 皆為 2×2 的轉移矩陣, A^{-1} 存在, I 是 2 階單位方陣, 且 $R_q = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{bmatrix}$, 則下列何者亦為轉移矩陣?

(1) $(A^{-1})^T$ (2) $\frac{1}{3}(A+B+C)$ (3) ABC (4) $\frac{1}{2}(A+I)^2$ (5) $(R_p)^{2016}$

6. 在直角坐標平面上, 下列五組條件中, 哪組恰可決定一圓?

(1) 過三點 $(1,0), (5,5), (9,10)$

(2) 以 $(1,0)$ 與 $(5,5)$ 為一直徑的兩端點

(3) 圓心為 $(1,2)$, 且與 x 軸、 y 軸都相切

(4) 圓心在 x 軸上且通過兩點 $(1,0), (0,1)$

(5) 與直線 $x+y=2$ 、 x 軸及 y 軸都相切

三、填充題：

7. 直角坐標平面上, 過點 $P(1, 1)$ 且與圓 $C: x^2 + (y+3)^2 = 1$ 相切之直線方程式為_____。

8. 直角坐標平面上, m 為實數, 若 $x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 6m^2 - 2m - 2 = 0$ 的圖形為一圓, 則此圓的最大面積 =_____。

9. 三階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 則以 a 表示 y 之值=_____。

10. 直角坐標平面上, 過 $A(-2, 1), B(4, 7)$ 二點, 且 \overline{AB} 之弦心距為 $\sqrt{2}$ 的圓有二個, 其中之一的圓方程式為 $x^2 + y^2 + ax + by + 5 = 0$, 則數對 $(a, b) =$ _____。

11. 設 A、B 二箱, A 箱內有 3 個黑球, B 箱內有 1 個白球。甲、乙兩人輪流取球, 每次先由甲自 A 箱內任取一球放入 B 箱, 再由乙自 B 箱內任取一球放入 A 箱, 這樣稱為一次交換。長期交換後, A 箱內為 3 個黑球的機率=_____。

12. 直角坐標平面上, 若直線 $2x + y + a = 0$ 與圓 $x^2 + y^2 + bx + cy - 15 = 0$ 相切於點 $(3, 4)$, 則求值: $a + b + c =$ _____。

13. 雄雄中學學生中中每天午餐都會訂購合作社便當 1 個, 便當有 A、B、C 三種廠牌。

假設中中的購買習慣如下: 中中有 $\frac{1}{3}$ 的機率會選擇和前一天相同廠牌的便當, 選擇另外兩種廠牌的機會則均

等。若中中在星期一購買了 A 廠牌便當, 請問他在同一週的星期五選擇 B 廠牌便當的機率=_____。

14. 將矩陣 $\begin{bmatrix} 105 & 2017 & 1 & 0 \\ 106 & 2016 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 作列運算後, 可得矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & a & b \\ 0 & 2 & x & y \end{bmatrix}$, 則求值: $bx - ay =$ _____。

15. 在直角坐標平面上, a, b 為兩定實數, 若對任意非零實數 t , 滿足矩陣方程式 $\begin{bmatrix} x-2t & y+4t \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ 的數對 (x, y) 均恰有一個, 則數對 $(a, b) =$ _____。

16. 設 a, b, c, d 皆為實數, 且滿足 $a^2 + b^2 = 1, (c-4)^2 + (d-3)^2 = 4$, 矩陣 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ d & c \end{bmatrix}$, 令 $\det(P)$ 之最小值為 $p, \det(Q)$ 之最大值為 q , 則數對 $(p, q) =$ _____。

四、計算作圖題:

17. (1) 在直角坐標平面上, 繪圖表示不等式 $x^2 + y^2 - 2x - 2|y| \leq 2$ 的範圍。

(2) 承(1), 不等式圖形所圍成區域面積為_____。

答案:

一、單選題:

1.(4) 2.(3) 3.(1)

二、多選題:

4.(1)(2)(4) 5.(2)(3)(5) 6.(2)(4)

三、填充題:

7. $15x - 8y = 7$ 或 $x = 1$ 8. $3p$ 9. $45a^2 + 10$ 10. $(0, -10)$ 11. $\frac{1}{4}$ 12. -12

13. $\frac{85}{256}$ 14. $\frac{3}{1061}$ 15. $(-\frac{1}{2}, 0)$ 16. $(-7, 7)$

四、計算作圖題:

17. (1) 略 (2) $\frac{16p}{3} + 2\sqrt{3}$