

一、是非題：(45%，每題 3 分)

甲. 有二無窮數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ ，對 $\forall n \in \mathbf{N}$ ， a_n, b_n 均為正數。下列敘述一定正確的請劃『O』，否則請劃『X』

- (1) 若 $\langle a_n \rangle$ 收斂， $\langle b_n \rangle$ 收斂，則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂
- (2) 若 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂， $\langle b_n \rangle$ 收斂，則 $\langle a_n \rangle$ 收斂
- (3) 若 $\langle \frac{b_n}{a_n} \rangle$ 收斂， $\langle b_n \rangle$ 發散，則 $\langle a_n \rangle$ 發散
- (4) 若 $\langle a_n \rangle$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂
- (5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\langle a_n \rangle$ 收斂

乙. 下列各函數，在 $x = 0$ 處連續者請劃『O』，否則請劃『X』 (註：[•] 表高斯符號)

- (1) $f_1(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$
- (2) $f_2(x) = \log_2 x$
- (3) $f_3(x) = [x]$
- (4) $f_4(x) = |x|$
- (5) $f_5(x) = \frac{\sin x}{x}$

丙. 有關函數的敘述，正確的請劃『O』，否則請劃『X』

- (1) 若函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，則函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續
- (2) 若函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \in \mathbf{R}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
- (3) 若函數 $f(x)$ 滿足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbf{R}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- (4) 若函數 $f(x)$ 為偶函數，滿足 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbf{R}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x} = L$
- (5) 若函數 $f(x)$ 為奇函數，滿足 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbf{R}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x} = -L$

二、填充題：(55%) (每格 5 分)

1. 試求下列各無窮數列與無窮級數的極限 (請回答收斂或發散。若收斂，請寫出收斂值)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 10n^2 - 20n + 1}{3n^2 + 4n + 5}$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 4^n}{5^n + (-6)^n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+2}。$$

2. 試求下列各函數的極限（請回答收斂或發散。若收斂，請寫出收斂值）

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - \sqrt{x+14}}{x-2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|-1}{[x]-2} \quad (\text{註：} [\bullet] \text{表高斯符號})$$

3. 無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{2}$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

4. 設 $a \in \mathbf{R}$ ，若函數 $f(x) = \begin{cases} ax+2 & x > -1 \\ x^2+5 & x \leq -1 \end{cases}$ 為連續函數，試求 a 之值。

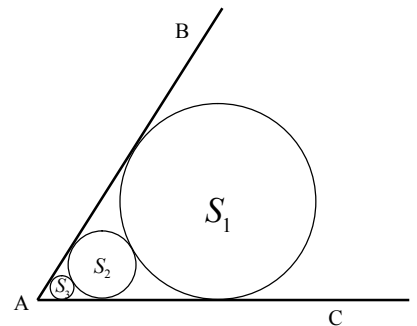
5. 設無窮等比數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 9$ ， $a_2 = -4$ ，試求 a_3 之值。

6. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ ， $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ ，試求 $f(3)$ 之值。

7. 一皮球自 100 公尺高處落下，每次返跳高度為落下時高度之 $\frac{2}{3}$ ，試求此皮球到靜止所經過路徑總長度。

8. 如右圖所示， $\angle BAC = 60^\circ$ ，圓 S_i 、圓 S_{i+1} 外切， $\forall i \in \mathbf{N}$ 且均與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 相切。

若最大圓 S_1 的面積 10，試求所有圓 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 的面積總和。



高雄中學 104 年度第二學期 期末考 三年級 社會組

數學科

班別： 姓名：

座號：

一、是非題(45%，每題 3 分)

| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| 甲 | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 乙 | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| 丙 | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |

二、填充題 (55%) (每格 5 分)：

| | | | |
|------|------|------|------|
| 1(1) | 1(2) | 1(3) | 2(1) |
| 2(2) | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | |

數學科

班別： 姓名：

座號：

三、是非題(45%，每題 3 分)

| | | | | | |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 甲 | (1) O | (2) O | (3) O | (4) X | (5) O |
| 乙 | (1) O | (2) X | (3) X | (4) O | (5) X |
| 丙 | (1) O | (2) O | (3) O | (4) X | (5) X |

四、填充題 (55%) (每格 5 分)：

| | | | |
|---------|------------|------------------|---------------------|
| 1(1) 發散 | 1(2) 收斂至 0 | 1(3) 發散 | 2(1) $-\frac{1}{8}$ |
| 2(2) 發散 | 3 3 | 4 -4 | 5 $\frac{4}{3}$ |
| 6 42 | 7 500 | 8 $\frac{45}{4}$ | |