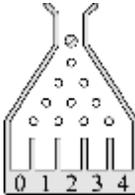


一、多重選擇題 (共 28 分, 每題 7 分, 錯一個選項得 4 分, 錯兩個選項得 1 分, 錯三個或三個以上選項不得分)

1. () 設 X 為一隨機變數且 X 的期望值 $E(X) = 5$, 變異數 $Var(X) = 9$, 標準差 $\sigma(X)$, 則下列何者正確?
- (A) $E(-2X+7) = -3$
 (B) $Var(3X-2) = 27$
 (C) $\sigma(-5X+1) = -45$
 (D) $E(X^2) = 4$
 (E) $E((X-5)^2) = 9$
2. () 有一橢圓 $\Gamma: 4x^2 + y^2 = 4$, 則下列哪些方程式的圖形可經由平移及旋轉與 Γ 重合?
- (A) $4x^2 - 24x + y^2 + 12y + 64 = 0$
 (B) $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{x^2 + (y-1+\sqrt{2})^2} = 4$
 (C) $x^2 + 4y^2 + 4x - 24y - 9 = 0$
 (D) $(x+1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$
 (E) $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$
3. () 彈珠臺的遊戲中, 從上方放入一粒彈珠, 彈珠每撞擊到釘柱時, 有可能向左或向右落下而撞擊下一層的釘柱, 設彈珠臺有 4 層釘柱, 到最後落到下方編號 0 到 4 的格子中; 若彈珠每次向左與向右落下的機率比為 3:1, 則下列何者正確?
- 
- (A) 落在 2 號格子的機率為 $C_2^4 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2$
 (B) 落在 1-3 號格子的機率大於七成
 (C) 落在 2 號格子的機率最大
 (D) 若 X 表示落到格子的號碼數, 則 $E(X) = 1$
 (E) 若彈珠掉進編號 X 的格子中, 可得獎金 $(2X^2 + 1)$ 元, 則獎金的期望值為 $\frac{9}{2}$
4. () 關於坐標平面上的線性變換, 請選出正確的選項?
- (A) 若 $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$, 則對任意的角度 θ , A_θ 均表示平面上的旋轉變換
 (B) 若 $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$, 則對任意的角度 θ , $A_\theta^{2016} = I_2$ (I_2 為二階單位方陣)
 (C) 若直線 $y = x$ 在二階方陣 A 變換下得直線 $y = x$, 則 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 或 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (D) 線段 \overline{AB} 在推移 $(x, y) \rightarrow (x, x+y)$ 變換下, 依然為一線段且長度不變
 (E) 若矩陣 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, 則 B 為一伸縮矩陣

二、填充題(共 59 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	7	14	21	28	35	40	45	50	53	56	59

1. 某次數學測驗有 20 題單一選擇題, 每題都有 5 個選項, 答對 1 題可得 5 分, 答錯倒扣 1.25 分。測驗完畢後, 某生確定其中 12 題可答對; 6 題可確定 2 個選項不正確, 因此這 6 題可從剩下的 3 個選項中分別猜選 1 個; 另外 2 題完全亂猜, 則他這次測驗得分之期望值為多少分? (A) 分。
2. 在坐標平面上, 將點 $P(x, y)$ 沿 y 軸推移 x 坐標的 3 倍, 再對原點逆時針旋轉 45° , 得新坐標為 $(-9, 17)$,

求點 $P(x, y)$ 為 (B)。

3. 將 5 個不同的球任意分配到 4 個不同的箱子，求空箱個數的期望值？ (C)

4. 已知 $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, 若 $(AB)^n = I_2$, (I_2 為二階單位方陣), 試求最小自然數 $n =$
(D)。

5. 直線 $L: x - 2y = 0$ 對直線 $y = 2x$ 鏡射後，再繞原點逆時針旋轉 45° 所得直線之方程式為 (E)。

6. 投擲一骰子，設 x 表示其點數，且 y 表示 x^{22} 的最高位數字，則 y 的期望值為 (F)。
($\log 2 = 0.301, \log 3 = 0.47712$)

7. 一題有 5 個選項的多重選題，至少有一個選項是正確的，全部答對給 8 分，答錯則倒扣，不作答時不給分也不倒扣，若希望公平（任意猜答案者得分期望值為 0），則答錯應倒扣 (G) 分。

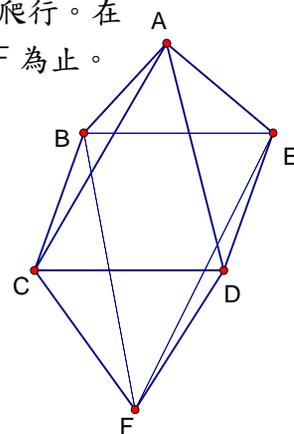
8. 一袋中有寫著 1 號卡片 1 張，2 號卡片 2 張，3 號卡片 3 張，4 號卡片 4 張，自袋中隨機取卡片兩次，一次一張，取後放回，以隨機變數 X 表示兩次卡片的號碼和，求 X 的變異數 (H)。

9. 投擲四顆公正的骰子，若出現三顆同點數，與另一顆不同點數時，可得獎金 2160 元，若出現四顆骰子點數皆不相同，可得獎金 648 元，若出現兩種點數各兩顆時，可得獎金 216 元，則其獎金的期望值為 (I) 元。

10. 座標平面上，不等式 $\frac{|4x+7y|}{3} + \frac{|5x+2y|}{4} \leq 1$ 所圍成的區域面積為 (J)。

11. 右圖為一個正八面體，一隻螞蟻自正八面體上方的頂點 A 出發，沿著正八面體的稜邊爬行。在每個頂點處牠會從四條稜邊中隨機地選擇一條向另一頂點前進，直到抵達下方的頂點 F 為止。

問螞蟻自上方頂點 A 爬行到下方頂點 F，所經過的稜邊數的期望值為 (K)。



三、計算證明題(共 13 分)

1. 何謂二項分布? (3 分)

2. 假設隨機變數 $X \sim B(n, p)$, 試證明: (1) $E(X) = np$ (5 分) (2) $Var(x) = np(1-p)$ (5 分)

高雄市立高雄高級中學第 105 學年度 第一學期 第一次期中考 高三 自然組 數學科 答案卷

班級_____ 姓名_____ 座號_____

一、多重選擇題 (共 28 分，每題 7 分，錯一個選項得 4 分，錯兩個選項得 1 分，錯三個或三個以上選上不得分)

1.	2.	3.	4.
AE	BD	ADE	AB

二、填充題 (共 59 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得分	7	14	21	28	35	40	45	50	53	56	59

(A)	(B)	(C)	(D)
65	$(4\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$\frac{243}{256}$	24
(E)	(F)	(G)	(H)
$9x + 13y = 0$	$\frac{11}{6}$	$\frac{4}{15}$	2
(I)	(J)	(K)	
395	$\frac{8}{9}$	6	

三、計算證明題 (共 13 分)

1. 何謂二項分布? (3 分)	
2. 假設隨機變數 $X \sim B(n, p)$ ，試證明 (1) $E(X) = np$ (5 分)	(2) $Var(x) = np(1-p)$ (5 分)

