高雄中學　105 學年度第一學期　第二次期中考　三年級數學科(社會組)【題目卷】

※注意：
⑴ *1.* ～ *15.* 題的答案寫在答案卷上對應題號的空格內，第 *16.* 題的計算證明過程寫在答案卷上。
⑵ 填充題 *9.* ～ *15.* 中，答案需展開化至最簡。

一、單一選擇題：第 1 題至第 5 題，每題選出最適當的一個選項，將答案寫在　　　上對應題號的空格內。

1. 某校高三學生的數學科段考成績呈常態分佈，且已知其分數之平均數為 70 分，標準差為 10 分。若從這次考試的學生中，隨機抽出一名學生，每位學生被選取的機會均等，則這位學生的成績介於 60 分與 90 分之間的機率最接近下列哪一個選項?

(1) 0.52　(2) 0.68　(3) 0.82　(4) 0.88　(5) 0.95

2. 某校高三學生的數學複習考成績呈現常態分佈，若平均成績加減一個標準差的區間範圍為 55 分～65 分，已知在此範圍內的人數共 544 人，若雄雄考 70 分，則雄雄在全校的排名約第幾名?

(1) 15　(2) 20　(3) 25　(4) 40　(5) 45

3. 某地區居民，用簡單隨機抽樣任取 96 名市民，有近視者佔 40%，在 95%信心水準下，有近視者的居民比率，其信賴區間為

(1) $[0.3, 0.5]$　(2) $[0.2, 0.4]$　(3) $[0.2, 0.6]$　(4) $[0.25, 0.55]$　(5) $[0.35, 0.45]$

4. 設 $a=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{4})^k$ ， $b=\sum_{k=1}^{2016}(\frac{1}{4})^k$ ， $c=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k$ ， $x_n=\frac{\alpha a^n}{1+a^n}+\frac{\beta b^n}{1+b^n}+\frac{\gamma c^n}{1+c^n}$ $(n\in N)$，其中 α,β,γ 為定實數，則極限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$　(1) 0　(2) $\alpha+\beta+\gamma$　(3) $\alpha+\beta$　(4) γ　(5) $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}$

5. 令多項式 $5x^n$ 除以 $(4x-3)^n$ 所得的餘式為 $r(x)$ ，設 $r(x)$ 的各項係數總和為 r_n 。請問極限 $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n)$ 為下列哪一選項?

(1) 1　(2) 3　(3) 4　(4) 5　(5) 不存在

二、多重選擇題：第 6 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，將答案寫在　　　上對應題號的空格內。

6. 考慮三無窮數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$ ，試問下列敘述何者正確?

⑴ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

⑵ 若對任一 $n\in N$ 皆滿足 $a_n\le c_n\le b_n$ ，且數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 皆為收斂數列，則 $\langle c_n\rangle$ 亦為收斂數列

⑶ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$ ，則 $\sum_{n=2016}^{\infty}a_n$ 是發散級數

⑷ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂， $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收斂

⑸ 若 $\langle a_n\rangle$ 為公差為負的等差數列，則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}3^{a_n}$ 必收斂

7. 某民調公司為新制度做市民滿意度調查，在高雄市成功訪問了 n 個市民，其結果為：在 95%信心水準之下，該制度的滿意度之信賴區間為 $[0.64, 0.76]$ ，試問下列敘述何者正確?

⑴ 高雄市所有市民中有 70%的人滿意該制度　⑵ $n\ge 200$

⑶ 高雄市所有市民滿意該制度的比率有可能大於 76%　⑷ 若增加民調人數，則信心水準提高

⑸ 若重新調查並將訪問人數增加為 $4n$ ，則在 95%信心水準之下，該制度的滿意度之信賴區間為 $[0.67, 0.73]$

8. 數學老師請全班49位同學使用隨機號碼表模擬投擲均勻硬幣9次,模擬的過程如下:
隨機指定給每位同學隨機號碼表的某一列,該列從左到右有9個數字:
如果數字為 0,2,4,6,8 時,對應投擲硬幣得到正面;
而數字為 1,3,5,7,9 時,對應投擲硬幣得到反面。
若班長雄雄拿到的一列數字依序為 072862550 ,且他計算硬幣出現正面的機率為95%信心水準下之信賴區間,則關於雄雄此次的模擬過程,下列敘述何者正確?
(1)此次模擬之投擲硬幣共得到6次正面
(2)此次模擬的信賴區間之長度為 $2\sqrt{\dfrac{\frac{6}{9}(1-\frac{6}{9})}{49}}$
(3)隨機再模擬一次上述過程,則新的$\hat{p}$會有95%的機會落在上述相同的信賴區間中
(4)隨機再模擬多次上述過程,每次都可求得其信賴區間,則這些信賴區間約有95%會包含 0.5
(5)若改成求68%信心水準下之信賴區間,其長度會減半

三、**填充題:第9題至第15題為填充題,將答案寫在　　　上對應題號的空格內。**

9. 求值: $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$ ＿＿＿＿＿＿。

10. 求極限: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n+1}-\frac{n^2+3n+1}{n+2}\right)=$ ＿＿＿＿＿＿。

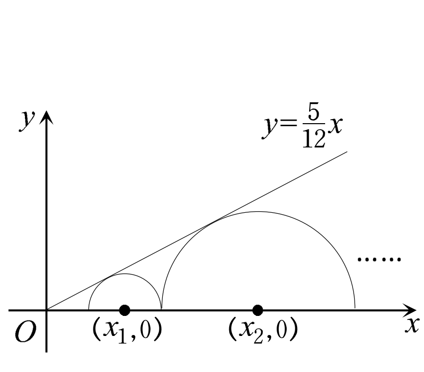
11. 求極限: $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{\sqrt{4n^2+k}}\right)=$ ＿＿＿＿＿＿。

12. 雄雄想了解某地區擁有手機的人的比率p有多少,他想要信心水準99.7%之下,其誤差不大於 1.5% ,請問他需要調查＿＿＿＿＿＿人。

13. 一無窮等比級數和為 $(1+0.\overline{3})$,各項平方和為 $(1+0.\overline{45})$,若此級數各項的立方和為 $(1+x)$,求值: $x=$ ＿＿＿＿＿＿。

14. 設x為實數,若 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x}{x+1}\right)^n$ 收斂於 $\frac{2x+1}{x-2}$,則求值: $x=$ ＿＿＿＿＿＿。

15. 如右圖,有無限多個半圓,相鄰的半圓彼此相切,且所有的半圓皆與直線 $y=\frac{5}{12}x$ 相切,設這些半圓的圓心由左至右的坐標分別為 $(x_1,0),(x_2,0),\cdots\cdots$,已知 $x_1=\frac{1}{10}$,求值: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n}=$ ＿＿＿＿＿＿。



四、**計算證明題:第16題為計算證明題,將過程詳細寫在　　　上。**

16. (1)假設 $n\in N$,試利用**數學歸納法**證明:當 $n\geq 4$ 時, $2^n\geq n^2$ 恆成立。
(2)試求極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ 之值為何?

高雄中學　105學年度第一學期　第二次期中考　三年級數學科(社會組)

高三　班別：______，座號：______，姓名:________________ **參考解答**

※注意：

(1) 1.～15.題的答案寫在答案卷上對應題號的空格內，第16.題的計算證明過程寫在答案卷上。

(2) 填充題9.～15.中，答案需展開化至最簡。

(3) 答對總格數與得分如下表：

答對總格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	74	78	82	86	90

1.	2.	3.	4.	5.
(3)	(2)	(1)	(4)	(4)
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
此格為多選，錯1個給一半，錯2個以上不給分 (3)(5)	此格為多選，錯1個給一半，錯2個以上不給分 (2)(3)	此格為多選，錯1個給一半，錯2個以上不給分 (1)(4)(5)	$\frac{1}{2}$	-2
11.	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**
$\frac{3}{2}$	10000	$\frac{729}{999}=0.\overline{729}$	$-\frac{1}{7}$ (多一個答案給一半)	18

※**計算題**：第16題為計算題，將過程詳細寫在下面。(共佔10分，每小題5分)

16.(1)

1^o當$n=4$時：$2^4=16\geq 4^2$，原命題成立

(1%)

2^o設$n=k$ ($k\geq 4$)時原命題成立，即$2^k\geq k^2$，

(1%)

則當$n=k+1$時，$2^{k+1}=2\cdot 2^k\geq 2\cdot k^2$，

因$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1$

$=(k-4)(k+2)+7\geq 0$

$\Rightarrow\ 2k^2\geq (k+1)^2$，

即$2^{k+1}\geq (k+1)^2$，原命題成立，

∴由數學歸納法得證

(3%)

(2)

因$2^n\geq n^2 \Rightarrow 0<\frac{n}{2^n}\leq\frac{1}{n}$，

因$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，

由夾擠原理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

(3%)

答：0

(沒有過程或過程錯而答案正確者給2%)