

高雄中學 105 學年度第一學期期末考高二自然組數學科試題

一、多重選擇題：(每題全對得 3 分，錯一得 2 分，錯二得 1 分，其餘得 0 分)共 15 分

1. 下列敘述哪些是正確的？

- (1) 空間中一直線 L 與線外一點 P 。若平面 E_1 包含 L 但不過 P 點，平面 E_2 過 P 點且平行 L 則 $E_1 // E_2$
- (2) 空間中兩直線 \overline{PQ} 與 \overline{RS} 是一對歪斜線，則 \overline{PR} 與 \overline{QS} 也為一對歪斜線
- (3) 空間中兩直線 L_1, L_2 若 $L_1 \perp L_2$ 且 L_1 垂直平面 E ，則 L_2 平行平面 E
- (4) 已知直線 L 不與平面 E 垂直，則空間中包含 L 且與 E 垂直的平面恰只有一個
- (5) 兩平面 E, F 垂直且交線為 L 。若平面 E 上一直線 $L_1, L_1 // L$ 則 L_1 平行平面 F 。
- (6)

2. 令 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$ 均不為 $\vec{0}$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) 若存在 $x, y \in \mathbb{R}$ 使 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ ，則 $\Delta \neq 0$
- (2) 若 \vec{c} 不能表成 \vec{a}, \vec{b} 的線性組合，則 \vec{a}, \vec{b} 平行
- (3) 若 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ 均不為 0 則 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 兩兩均不平行
- (4) 若 $\Delta = 0$ ，則 \vec{c} 不能表成 \vec{a}, \vec{b} 的線性組合
- (5) 若方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 有唯一解，則 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 兩兩均不平行。

3. 將矩形卡片 $ABCD$ 沿對角線 \overline{AC} 上摺，使 D 至 D' 位置，由 D' 作 ABC 平面之垂線 $\overline{D'H}$ ，其垂足 H 恰好在 \overline{AB} 上，連 $\overline{BD'}$ 。已知 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = 1$ ，則下列哪些選項是正確的？

- (1) $\overline{BD'} = \sqrt{3}$ (2) $\overline{D'B} \perp \overline{BC}$ (3) $\overline{AD'} \perp \overline{BD'}$ (4) $\triangle ABD'$ 與 $\triangle ACD'$ 所夾二面角為 30° (5) 平面 ABC 與平面 BCD' 的交角為 60° 或 120°

4. 四面體 $A-BCD$ 中 $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 5, \overline{CD} = 6, \overline{AB} = 4$ ， M, N 分別為 $\overline{CD}, \overline{AB}$ 的中點，則下列哪些選項是正確的？(1) $\triangle ACD$ 與 $\triangle BCD$ 所夾二面角為 60° (2) \overline{CD} 垂直平面 ABM (3) 平面 NCD 垂直平面 ABC (4) 若 \overline{DH} 為 $\triangle NCD$ 的高則 \overline{DH} 垂直平面 ABC (5) 四面體 $A-BCD$ 的體積為 $8\sqrt{3}$

5. 正四面體 $O-ABC$ 中已知 $O(0,0,0), A(2,0,0), B(1,1, -\sqrt{2})$ ， \overline{OH} 垂直平面 ABC 於 H ，則下列哪些選項是正確的？(1) $\overline{OH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) 若 $O-P-H$ 則 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ (3) 正四面體任兩面所成的二面角大於 60° (4) $\overline{OA} \perp \overline{BC}$ (5) C 點在 x 軸上的正射影為 $(1,0,0)$

二、填充題：

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	10	20	30	40	46	52	58	64	70	75

1. 坐標平面上直線 L 的斜角為 θ ，已知 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ，且 L 的 y 截距為 -3，試寫出 L 的參數式_____

2. 三直線 $L_1: x+2y=13$ 、 $L_2: 2x-y=3$ 、 $L_3: x-2y=9$ 。(1) 求過原點與 L_1 銳交角為 45° 的直線方程式_____

(2) 求此三線圍成三角形的內心坐標_____

3. 長方體 ABCD-EFGH 中， $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{AD}=3$ 、 $\overline{AE}=2$ 且 P、Q、R 三點分別滿足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PD}$ 、 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{QG}$ 、 $\overrightarrow{FR}=3\overrightarrow{RE}$ ，

試求 $\cos \angle QPR =$ _____

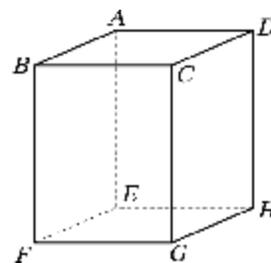
4. 已知 $|\vec{u}|=2$ 、 $|\vec{v}|=3$ 、 $|\vec{u}+2\vec{v}|=2\sqrt{14}$ ，若 \vec{w} 表與 \vec{u} 垂直的單位向量，且 $\vec{v} = x\vec{u} + y\vec{w}$ ，求 $y =$ _____

5. 已知直線 $ax+by=1$ 過點 $(-4,3)$ ，試求兩平行線 $ax+by=1$ 、 $ax+by=6$ 之間的最大距離_____

6. 空間中三點 P $(4, -4, 6)$ 、Q $(2, 0, 2)$ 、R $(4, -1, 3)$ ，試求 P 到 \overline{QR} 的最短距離_____

7. 如右圖所示，ABCD-EFGH 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P

滿足 $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD} + a\vec{AE}$ ，則實數 $a =$ _____



8. 已知由向量 $2\vec{u}+7\vec{v}$ 與 $5\vec{u}+4\vec{v}$ 所張成的平行四邊形面積為 18，則由 \vec{u}, \vec{v} 所張成的平行四邊形面積為_____

9. 空間中 P(x,y,z)、Q(1,2,1) 已知 $\overline{PQ}=3$ ，求 $2x-2y+z$ 有最小值時 P 點坐標_____

三、計算題：(10 分，請詳列計算過程，否則不予計分)

1. a 為實數，試就 a 值討論方程組 $\begin{cases} 6x+(a-2)y=7a-17 \\ (a+5)x-2y=-8a-24 \end{cases}$ 之解，若有唯一解寫出其解，若無限多解則寫出參數式。

高雄中學 105 學年度第一學期期末考高二自然組數學科答案卷

二年 _____ 班 _____ 號 姓名： _____ 得分 _____

一、多重選擇題：每題全對得 3 分，錯一得 2 分，錯二得 1 分，其餘得 0 分，共 15 分											
1.	2,4,5		2.	2,3		3.	1,2,3,4		4.	1,2,3,4,5	
二、填充題：											
格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
得分	10	20	30	40	46	52	58	64	70	75	
1.	$\begin{cases} x=3t \\ y=-3+4t \end{cases}, t \in R$			2.(1) $y=-3x$ 或 $y=\frac{1}{3}x$			2.(2) (5,1)		3. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$		
4.	$\pm\sqrt{5}$			5. 25			6. $2\sqrt{3}$		7. $\frac{3}{2}$		
8.	$\frac{2}{3}$			9. (-1,4,0)			/				

三、計算題：(10 分)

1.

(1) $a \neq -1, -2$ 有唯一解 $(-\frac{2(4a-7)}{a+2}, \frac{7a+59}{a+2})$ (4 分)

答：(2) $a=-1$ ，無限多解 $x=t, y=2t+8, t \in R$ (4 分)

(3) $a=-2$ ，無解 (2 分)