

高雄中學 105 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科 試題卷 (自然組)

命題範圍：高三數學 3-1 數列的極限與無窮等比級數、3-2 函數的概念、3-3 函數的極限、4-1 微分

說明：1. 請作答在答案卷上，須將答案填入正確欄位，否則不予計分。

一、是非題：判斷各題之敘述是否正確，正確請填 ○，錯誤請填 ×。每題 2 分，共 16 分。

1. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ 為遞增函數
2. $f(x) = \sin\left(x + \frac{P}{2}\right)$ 為偶函數
3. 若函數 $f(x)$ 在 $x=2$ 處連續，則 $f(x)$ 在 $x=2$ 處的導數必存在
4. 函數 $f(x) = |x-1|$ 在 $x=1$ 處連續
5. 函數 $g(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$ 在整個實數 R 上連續
6. 無窮級數 $1-1+1-1+\dots$ 為收斂級數
7. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 皆發散，則數列 $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ 必發散
8. 曲線 $y = \tan x$ 在坐標原點的切線為水平線

二、題組：每題 3 分，共 24 分。

1. 對下列各小題，分別求 $f'(1)$ 。

(1) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$

(2) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^5$

(3) $f(x) = \frac{2x-3}{3x^2-x+2}$

(4) $f(x) = |x-1|$

2. 求下列各小題極限值。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+5)(4n-1)}{2n^2+3n-2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{2} \right]$ ，其中 $[\]$ 為高斯符號

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 2n + 3} - \sqrt{n^2 + 4n + 5} \right)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6^n + 66^n + 666^n}$

三、填充題：依下列配分表計分，共 48 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
總得分	6	12	18	22	26	30	33	36	39	42	45	48

1. 函數 $f(x) = \frac{3x-1}{2x+3}$ ，函數 $g(x)$ 滿足 $f(g(x)) = x$ ，則 $g(x) =$ (A)

2. $\langle a_n \rangle$ 為無窮等比數列，已知 $a_1 = 0.\bar{7}$ ， $a_2 = 0.6\bar{9}$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ (B)

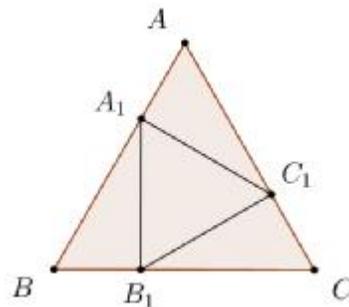
3. 在直線的公路上行駛的一輛汽車，從剎車至完全停止這段時間內，測得剎車後在 t 秒內前進的距離為 $S(t) = -t^2 + 6t$ 公尺。則此輛汽車從剎車後到完全停止，過程中總共行駛的距離為 (C) 公尺

4. 已知 $f(x)$ 為可微分函數，且在 $x \geq -\frac{3}{4}$ 時， $f(2x^2+3x+1) = x^2+3x-5$ ，求 $f'(3) = \underline{\text{(D)}}$

5. 由點 $(0, 4)$ 對曲線 $xy=6$ 作切線，則切點坐標為 (E)

6. 如圖，正 $\triangle ABC$ 邊長為 3，在三邊上分別取點 A_1, B_1, C_1 ，使 $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ， $\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ ；在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，依相同作法分別取點 A_2, B_2, C_2 ，使 $\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1B_1}$ ， $\overrightarrow{B_1B_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}$ ， $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1A_1}$ ；如此不斷進行，

求所有三角形面積和： $\triangle ABC + \triangle A_1B_1C_1 + \triangle A_2B_2C_2 + \dots = \underline{\text{(F)}}$



7. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b, & \text{if } x < 2 \\ 3, & \text{if } x = 2 \\ x^3+2ax^2+3bx-7, & \text{if } x > 2 \end{cases}$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$ ，則實數對 $(a, b) = \underline{\text{(G)}}$

8. 拋物線 $\Gamma: y = (x-2)^2 + 1$ 經平移後，新的圖形方程式為 $\Gamma': y = (x+1)^2 + 7$ ，已知 Γ 與 Γ' 恰有一條公切線，則此公切線方程式為 (H)

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+(2n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right) = \underline{\text{(I)}}$

10. $f(x)$ 為多項式函數，已知 $3f(x) - xf'(x) = 2x + 6$ ，且 $f(1) = 2$ ，則 $f(x) = \underline{\text{(J)}}$

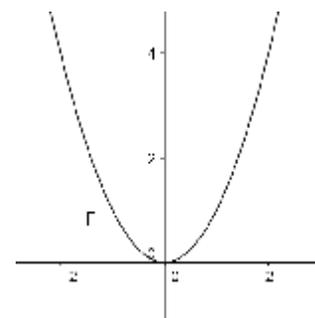
11. 設函數 $f(x) = -x^2 + 2x - \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ ，則 $f(x)$ 的值域為 (K)

12. 袋中有 3 黑球 1 白球，每顆球被取出的機會均等，某人由數線上之坐標原點出發，進行一遊戲：每一回合由袋中取出一球，若為白球則朝數線負向移動一單位，遊戲結束；若為黑球則朝數線正向移動一單位，將黑球放回袋中，進行下一回合。如此持續進行下去，設遊戲結束時其在數線上的位置坐標為 X ，則 X 的期望值為 (L)

(例如：若依序取出黑球、黑球、黑球、黑球、白球，則遊戲於第五回合結束，此時 $X = 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 3$)

四、計算證明題：請使用黑色墨水筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 12 分。

1. 對於拋物線 $\Gamma: y = x^2$ 圖形上任意相異兩點 A, B ，作 \overline{AB} 中點 M ，過 M 作平行於拋物線對稱軸的直線 L ，設 L 與 Γ 交於點 C 。證明：以 C 為切點(與 Γ 相切)的切線必與 \overline{AB} 平行。(6 分)



2. 已知 $(1+x)^{10} = C_0^{10} + C_1^{10}x + C_2^{10}x^2 + \dots + C_9^{10}x^9 + C_{10}^{10}x^{10}$ ，求

(1) $C_1^{10} + 2C_2^{10} + 3C_3^{10} + \dots + 9C_9^{10} + 10C_{10}^{10} = ?$ (3 分)

(2) $1^2C_1^{10} + 2^2C_2^{10} + 3^2C_3^{10} + \dots + 9^2C_9^{10} + 10^2C_{10}^{10} = ?$ (3 分)

高雄中學 105 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科 答案卷 (自然組)

班級：3 年 _____ 班 座號： _____ 姓名： _____

一、是非題：判斷各題敘述是否正確，正確請填 ○，錯誤請填 ×。每題 2 分，共 16 分。

1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.	
----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

二、題組：每題 3 分，共 24 分。

1. (1)		1. (2)		1. (3)		1. (4)	
-----------	--	-----------	--	-----------	--	-----------	--

2. (1)		2. (2)		2. (3)		2. (4)	
-----------	--	-----------	--	-----------	--	-----------	--

三、填充題：依下列配分表計分，共 48 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
總得分	6	12	18	22	26	30	33	36	39	42	45	48

(A)		(B)		(C)		(D)	
(E)		(F)		(G)		(H)	
(I)		(J)		(K)		(L)	

四、計算證明題：請使用黑色墨水筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 12 分。

<p>1. (6分)</p> <p>答：</p> <div style="text-align: center;"> </div>	<p>2. (每小題 3 分，共 6 分)</p> <p>答：</p>
---	-------------------------------------

To: _____ 師，請指正。

高雄中學 105 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科 <<參考解答>> (自然組)

一、是非題：判斷各題敘述是否正確，正確請填 ○，錯誤請填 ×。每題2分，共16分。

1.	○	2.	○	3.	×	4.	○	5.	×	6.	×	7.	×	8.	×
----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---

二、題組：每題3分，共24分。

1. (1)	6	1. (2)	0	1. (3)	$\frac{13}{16}$	1. (4)	不存在
-----------	---	-----------	---	-----------	-----------------	-----------	-----

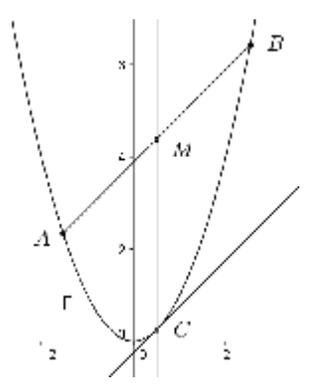
2. (1)	6	2. (2)	不存在	2. (3)	-3	2. (4)	666
-----------	---	-----------	-----	-----------	----	-----------	-----

三、填充題：依下列配分表計分，共 48 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
總得分	6	12	18	22	26	30	33	36	39	42	45	48

(A)	$\frac{-3x-1}{2x-3}$	(B)	$\frac{70}{9}$	(C)	9	(D)	$\frac{4}{5}$
(E)	(3, 2)	(F)	$\frac{27\sqrt{3}}{8}$	(G)	(3, -3)	(H)	$2x+y=4$
(I)	2	(J)	$-x^3+x+2$	(K)	$[-\frac{13}{4}, -1]$	(L)	2

四、計算證明題：請使用黑色墨水筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 12 分。

<p>1. (6分)</p> <p>答：不妨假設 $A(a, a^2)$、$B(b, b^2)$，</p> <p>則 $M(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2})$</p> <p>因為 L 為鉛錘線，</p> <p>所以 C 的 x 坐標亦為 $\frac{a+b}{2}$。</p> <p>將拋物線函數微分得 $y'=2x$，</p> <p>$x=\frac{a+b}{2}$ 代入，可得切線斜率為 $a+b$。</p> <p>\sum AB 斜率為 $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$ (A、B 相異，$a \neq b$)</p> <p>兩斜率相等，故相互平行。</p> 	<p>2. (每小題3分，共6分)</p> <p>答：(1) <u>5120</u> (2) <u>28160</u></p> <p>(1) $(1+x)^{10} = C_0^{10} + C_1^{10}x + C_2^{10}x^2 + \mathbf{L} + C_{10}^{10}x^{10}$</p> <p>兩邊對 x 微分：</p> <p>$10(1+x)^9 = C_1^{10} + 2C_2^{10}x + \mathbf{L} + 10C_{10}^{10}x^9 \dots\dots \textcircled{1}$</p> <p>$x=1$ 代入得</p> <p>$C_1^{10} + 2C_2^{10} + \mathbf{L} + 10C_{10}^{10} = \underline{5120}$</p> <p>(2) 將 $\textcircled{1}$ 式兩邊同乘 x：</p> <p>$10x(1+x)^9 = C_1^{10}x + 2C_2^{10}x^2 + \mathbf{L} + 10C_{10}^{10}x^{10} \dots\dots \textcircled{2}$</p> <p>兩邊微分：</p> <p>$10(1+x)^9 + 10x \cdot 9 \cdot (1+x)^8 = C_1^{10} + 2^2 C_2^{10}x + \mathbf{L} + 10^2 C_{10}^{10}x^9$</p> <p>$x=1$ 代入：$C_1^{10} + 2^2 C_2^{10} + \mathbf{L} + 10^2 C_{10}^{10} = \underline{28160}$</p>
--	---