

高雄中學 105 學年度第二學期第二次期中考高二自然組數學科試題

一、多重選擇題：(全對算一題分，只錯一選項算半題，錯兩個以上選項零分)

1. 設 A 、 B 、 C 皆為 2 階方陣， I 為 2 階單位方陣，則下列何者正確？(1)若 $\det(AB) \neq 0$ ，則 $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (2)若 $AB = I$ ，則 $BA = I$ (3)若 $ABA^{-1} = I$ ，則 $B = I$ (4)若 AB 的反方陣存在，則 A 和 B 的反方陣也都存在 (5)若 $AB = BC$ 且 B^{-1} 存在，則 $A = C$

2. 若 $P(1, -5)$ 為圓 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 外一點，自 P 作圓之切線，得切點為 Q, R ，若 Q 與 R 之坐標分別為 (a, b) 與 (c, d) ，則下列哪些選項正確？(1) A 為圓上任一點則 $\overline{PA} < 10$ (2) $\overline{PQ} = 6$ (3) $a + b + c + d = -\frac{16}{5}$ (4) $\triangle PQR$ 外接圓直徑為 $5\sqrt{3}$ (5) $\sin \angle QPR = \frac{4}{5}$

3. 設 $x, y \in R$ ，滿足 $\begin{bmatrix} x+2 & y-4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ 的解 (x, y) 的個數下列何者正確？(1)無解 (2)恰一組解 (3)恰有兩組解 (4)無限多組解 (5)由 $\begin{vmatrix} x+2 & y-4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的值決定

4. 設 A, B 是兩個 2×2 階的轉移矩陣， C 是二階方陣，請問下列哪些敘述是正確的？(1) $\det(A) > 0$ (2) A^2 是轉移矩陣 (3) B 是可逆矩陣 (4) $\frac{1}{2}(A+B)$ 是轉移矩陣 (5) 若 $AC = B$ 則 C 也為轉移矩陣。

5. 下列哪些選項正確？(1) 點 $P(-4, 3)$ 對直線 $2x - y = 0$ 鏡射得 $P'(\frac{24}{5}, -\frac{7}{5})$ (2) 點 $P(-4, 3)$ 以原點為中心，旋轉 -30° 得 $P'(\frac{4\sqrt{3}-3}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2})$ (3) 直線 $y = 2x$ 以原點為中心，伸長為 3 倍得直線 $y = 6x$ 。(4) 將 $x^2 + y^2 = 1$ 沿 x 軸方向推移 y 坐標的 -2 倍得新圖形 $x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$ 。(5) $x^2 + y^2 = 1$ 經平面變換 $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 作用後所得圖形面積為 π 。

二、填充題：

1. 試求與兩平行線 $3x + 4y - 10 = 0$ ， $3x + 4y - 40 = 0$ 均相切且圓心與原點距離最小的圓方程式_____。

2. 若四點 $A(0, 6)$ ， $B(4, 8)$ ， $C(9, 3)$ ， $D(-2k, k)$ 共圓，則 $k =$ _____。

3. 試求過 $A(2, 2)$ ， $B(0, 4)$ 兩點且與 x 軸相切的圓方程式_____。

4. 求方程式 $(|x| - 1)^2 + y^2 = 4$ 在 xy 平面上所成圖形的周長_____。

5. 設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ，若 $AX + B = 2A$ ，求 $X =$ _____。

6. 求實數 a 的條件使得對任意實數 x 方陣 $A = \begin{bmatrix} x & a \\ 3-x & x+a \end{bmatrix}$ 恆有逆矩陣_____。

7. A 、 B 均為 n 階方陣， $A = [a_{ij}]$ ， $a_{ij} = 2i - j$ ， $B = [b_{ij}]$ ， $b_{ij} = i + 2j$ ， $AB = C = [c_{ij}]$ 。若已知 $c_{33} < 0$ ，試求 n 的最小值_____。

8. 設矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & k & 1 \\ 2 & -3 & k & 0 \\ 3 & -2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ 經過矩陣列運算得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ ，求 $k =$ _____。

9. 二階方陣 $A = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ k & 5 \end{bmatrix}$ ，若 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，試求矩陣 $A^2 - B^2 =$ _____。

10. 已知圓 C 的圓心為 $(-2, 1)$ 且圓上有一點 $(2, -2)$ 。將圓 C 對直線 $2x - y = 0$ 鏡射得圓 C' ，試求圓 C' 的方程式_____。

11. 設 $A(\theta)$ 表以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的旋轉方陣， $0 < \theta < 2\pi$ 。以原點為圓心的圓上一點 P ，以 P 為切點的切線為 $4x + 3y = 25$ 。若 P 經 $A(\theta)$ 變換後得 P' ，且已知以 P' 為切點的切線為 $3x + 4y = -25$ ，試求矩陣 $A(\theta) =$ _____。

計算題：(每小題各 5 分)

一箱中有 2 白球 2 黑球，每次自箱中取走兩球後，一律放回 1 白球 1 黑球，完成一局的操作。設狀態 i 表箱中白球有 i 個，(1) 試寫出此重複試驗的轉移矩陣 (2) 求操作三局後箱中有 2 白球的機率 (3) 求無限次的操作後箱中有 2 白球的機率。

高雄中學 105 學年度第二學期第二次期中考高二（自然組）數學科

答 案 欄 二年____班____號 姓名：_____

題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	7	14	21	27	33	39	45	51	56	61	66	70	74	78	82	85

一、多重選擇題 (全對算一題分，只錯一選項算半題，錯兩個以上選項零分)

1. (2)(3)(4)	2. (1)(2)(3)(5)	3. (3)	4. (2)(4)	5. (1)(4)(5)
------------------------	---------------------------	------------------	---------------------	------------------------

二、填充題:

1. $(x-3)^2+(y-4)^2=9$	2. 0 or -2	3. $x^2+(y-2)^2=4$ or $(x-8)^2+(y-10)^2=100$
4. $\frac{16p}{3}$	5. $\begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$	6. $-3 < a < 0$
7. 10	8. 2	9. $\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ -4 & -16 \end{bmatrix}$
10. $(x-2)^2+(y+1)^2=25$	11. $\frac{1}{25} \begin{bmatrix} -24 & 7 \\ -7 & -24 \end{bmatrix}$	

三、計算題: (每小題 5 分)

Ans : (1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2) $\frac{65}{108}$ (3) $\frac{3}{5}$