高雄中學 106 學年度第二學期數學科第一次段考題目卷

一、 多擇題(15 分)

說明：本大題共有 3 題，每題 5 分，答錯一個選項得 3 分，兩個或兩個以上 0 分。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。請注意多選題選項亦有可能只有一個。

1. (　　) 關於指數以及對數的相關敘述，下列何者正確？

(A)對於任意實數 a ，$a^0=1$。

(B)對於正整數 n ，$a>0$，$\sqrt[n]{a}$ 定義為方程式 $x^n=a$ 的唯一實根。

(C)因為對於正整數 n ，方程式 $x^n=-2$ 沒有實數解，所以函數 $g(x)=(-2)^x$ 的定義域不能包含有理數。

(D)對於正整數 n,p ，整數 m ，正實數 a ，皆有 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ 。

(E)對於 $0<a\neq 1$, $b>0$，由於 $f(x)=a^x$ 為一嚴格遞增函數，因此 $a^x=b$ 有唯一正實數解，並且數學上定義該解為 $\log_a b$ 。

2. (　　) 下列關於各方程式的實根個數的敘述，請選出正確的選項。

(A) $2^x=-x-3$ 恰有 1 個實根。

(B) $x^2=2^{|x|}$ 恰有 2 個實根。

(C) $2^x=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}x$ 恰有 1 個實根。

(D) $\log_2|x|=|x|-1$ 恰有 2 實根。

(E) $|\log_2 x|=|-2x+4|$ 恰有 2 個實根。

3. (　　) 關於下列就各實數的大小關係，請選出正確的選項。

(A)若 $a=13^{22},\ b=6^{33},\ c=2^{88}$ ，則 $a<b<c$ 。

(B)若 $3^a=5^b=7^c$ ，則 $a<b<c$ 。

(C) $\log_{\left(\frac{1}{5}\right)}3<\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}5<\log_5 3<\log_3 5$ 。

(D) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\log 2+\frac{1}{\sqrt{2}}\log 7>\log\left(2+\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

(E) $3^{\sqrt{2}}+3^{-\sqrt{2}}>\sqrt{3}$

二、 填充題(65 分)

說明：本大題共有 10 題，依照量尺給分，全對才給分。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。

1. 若 $x\in R$，且滿足 $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+3^{x+4}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}$ ，試求 $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ 。

〈背後還有題目〉

2. 若正實數 x, y, z 滿足：$\dfrac{\log x}{2}=\dfrac{\log y}{3}=\dfrac{\log z}{4}$，且 $xyz=10$。試求數對 (x,y,z) 。

3. 若 $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)$，試求 $\dfrac{y}{x}$ 。

4. 數列 $\langle a_n\rangle$，$n\in N$，滿足 $a_1=100$，$2\log_{a_{n+1}}10+3\log_{a_{n+1}}a_n=1$，試求數列一般項 a_n。

5. 試解不等式：$(\log_2 x-2)(\log_3 x+1)^2(\log_{\sqrt{7}} x-3)^3\left(\log_{\frac{1}{5}} x-1\right)<0$ 。

6. 假設 $f(x)=(\log_3 9x)^2+2\log_3(3x)^2+4\log_3 x+2$，$x>0$，在 $x=x_0$ 時有最小值 m，試求數對 (x_0,m) 。

〈背後還有題目〉

7. a, b 皆為大於1的實數，c 為不等於1的正實數，且 $2\left(\log_a c+\log_b c\right)=9\log_{ab} c$ ，試求 $\log_a b$ 。

8. 已知 $5^x-5^{-x}=3\sqrt{5}$ ，試求：$5^{3x}+5^{-3x}$ 。

9. $y=f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$ 與 $y=g(x)=\dfrac{a}{2^x+2^{-x}}$ 兩函數圖形在座標平面上相交於 A,B 兩點且 $\overline{\mathrm{AB}}=1$，試求實數 a 。

10. 已知 p, q 分別是 $x-7+\log_2 x=0$ 以及 $x-7+2^x=0$ 的實數解，試求 $\log_2 p+2^q$ 。

11. 假若對於所有實數 x ，$f(x)>0$ ，並且滿足 $f(10)=a$ ，以及 $\forall x,y\in R,\ f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 。

試求 $f(\frac{m}{n})$ （以 a 表示），其中 n,m 為兩個正整數。

三、 計算證明題(20 分)

說明：本大題共有 2 題，請詳細寫下計算過程或證明。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。

I. 若 a,c 為不等於1的正實數，且 $x>0,\ y>0$ ，試證明以下兩道對數律：

(1) $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$ （5 分） (2) $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ （5 分）

II. 請利用數學歸納法證明：對於所有大於或等於 10 的正整數 n ，$n^3<2^n$ 。(10 分)

〈試題結束〉

高雄中學 106 學年度第二學期數學科第一次段考題目卷

高雄中學 106 學年度第二學期數學科第一次段考答案卷

班級：__________ 姓名：______________ 座號：_______ 得分：___________

一、 多選題(每題 5 分，答錯一個選項得 3 分，錯兩個或兩個以上 0 分。共 15 分。)

(1) D	(2) AC	(3) AE

二、 填充題(依照下列量尺給分，全對才給分。共 65 分。)

答對題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
得　　分	8	16	24	32	38	44	50	55	59	62	65

(1) $\frac{121}{31}$	(2) $\left(10^{\frac{2}{9}},10^{\frac{3}{9}},10^{\frac{4}{9}}\right)$	(3) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	(4) $10^{(3^n-1)}$
(5) $\frac{1}{5}<x<4,\ x\neq\frac{1}{3},\ \sqrt{343}<x$	(6) $\left(\frac{1}{729},-26\right)$	(7) $\frac{1}{2}$ 或 2	(8) 322
(9) $\frac{9}{4}$	(10) 7	(11) $a^{\frac{m}{10n}}$	

三、 計算證明題(20 分)

I.(第 1 小題 5 分，第 2 小題 5 分)

略

II.（10 分）

因為$10^3=1000<1024=2^{10}$，命題在$n=10$時成立。假設命題在$n=k$時成立，其中$k\geq 10$，則：

$\left(k+1\right)^3=k^3+3k^2+3k+1<2k^3<2\cdot 2^k=2^{k+1}$。根據數學歸納法，該命題成立。