高雄中學一〇六學年度第二學期第一次段考數學科試卷(三年級自然組)

三年____班 ____號　姓名______________

一、單選題

1. 學校召開班級代表大會，規定各班每 15 人推選一名代表(各班人數均超過 15 人)。當班級人數除以 15 的餘數大於或等於 12 時，再增選一名代表。若班級人數為 x 人，該班代表人數為 $f(x)$人，請問可用下列哪一選項描述 $f(x)$？($[x]$表不大於 x 的最大整數)

(1) $f(x)=\left[\dfrac{x}{15}\right]$　(2) $f(x)=\left[\dfrac{x+2}{15}\right]$　(3) $f(x)=\left[\dfrac{x+3}{15}\right]$　(4) $f(x)=\left[\dfrac{x+4}{15}\right]$　(5) $f(x)=\left[\dfrac{x+5}{15}\right]$

2. 下列哪個函數圖形對稱於 y 軸？($[x]$表不大於 x 的最大整數)

(1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{10^x-10^{-x}}$　(2) $f(x)=x\log\dfrac{1-x}{1+x}$　(3) $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$

(4) $f(x)=(2^x+2^{-x})\tan x$　(5) $f(x)=[x]-x$

3. 下列哪一個函數的圖形和 $f(x)=x$ 的圖形相同？

(1) $f_1(x)=\sqrt{x^2}$　(2) $f_2(x)=\dfrac{2x+|x|}{3}$　(3) $f_3(x)=2^{\log_2 x}$　(4) $f_4(x)=\log_3 3^x$　(5) $f_5(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}+1$

二、多重選擇題(每題至少有一個正確選項)

1. $f(x)$滿足 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$，則下列何者正確？

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{f(x)}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}\right)=5$　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(f(x))^2}{x-1}=25$　(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=5$　(4) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$　(5) $\lim\limits_{x\to1}xf(x)=0$

2. $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$為兩無窮數列，試判斷下列何者正確？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n{}^2)=0$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(a_n{}^2)=\alpha^2$　(3) $\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$皆收斂$\Leftrightarrow$ $\langle a_nb_n\rangle$ 收斂

(4)若$\langle a_n\rangle$發散，$\langle b_n\rangle$收斂，則 $\langle a_n+b_n\rangle$ 發散　(5)若$\langle a_n\rangle$發散，$\langle b_n\rangle$收斂，則 $\langle a_nb_n\rangle$ 發散

3. $f(x)=[2x+1]-[2x-1]$，其中$[x]$表不大於 x 的最大整數。則下列何者正確？

(1) $f(x)$在 $x=\dfrac{1}{2}$處不連續　(2) $f(x)$在 $x=\dfrac{-1}{2}$處不連續　(3) $f(x)$在 $x=0$ 處不連續

(4) $f(x)$在 $x=1$ 處連續　(5) $f(x)$沒有不連續點

4. $f(x)=\dfrac{-1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，定義 $f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$\forall n\in\mathbb{N}$。試問下列何者正確？

(1) $\deg f_3(x)=3$　(2) $f_{n+2}(0)>f_n(0)$, $\forall n\in\mathbb{N}$　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=\dfrac{1}{3}$　(4) $0\le f_n(0)\le\dfrac{1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}f_n(0)=f_1(0)-f_2(0)+f_3(0)-f_4(0)+\cdots=\dfrac{1}{3}$

高雄中學一〇六學年度第二學期第一次段考數學科試卷(三年級自然組)

三、填充題

1. 設 $a=0.\overline{1414}$, $b=0.1\overline{414}$, $c=0.14\overline{14}$, $d=0.141\overline{4}$, $e=0.1414$。試比較 a,b,c,d,e 的大小。

2. 試將分數$\dfrac{201}{370}$化為循環小數。

3. 求極限值 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)^{10}-20x-1}{x^2}$ 並化簡。

4. 數列$\langle a_n\rangle$滿足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{3n+5}=2$ ，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n+n^2+n+1}{4n^2-3n-1}$ 之值。

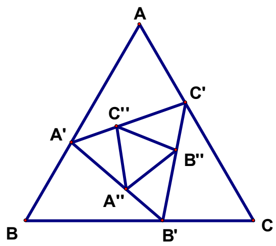
5. $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，$i=\sqrt{-1}$。

試求無窮級數和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^n=1+\dfrac{\omega}{2}+\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^3+\ldots+\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^n+\ldots$ 之實部。

6. 芝諾(Zeno)曾提出阿奇里斯悖論：阿奇里斯與烏龜賽跑。阿奇里斯讓烏龜先走了 100 英尺，然後阿奇里斯再開始追烏龜。當阿奇里斯追了 100 英尺後，烏龜已經前進了一段距離；而他在追的這段時間，烏龜又往前進了，而這情況會一直重演，所以不管阿奇里斯如何追烏龜都有追不完的距離，因為烏龜到過的地方有無限的點讓阿奇里斯去追。

試問：若阿奇里斯每秒可跑 10 英尺，烏龜每秒移動 0.1 英尺，試問阿奇里斯要花多久時間才能追上烏龜？(請記得加上單位)

7. 將一正三角形△ABC，依序將三邊以 3:2 分段，將其分點連成一三角形△A'B'C'；再將新作出的三角形三邊依序分段成 3:2 兩線段，再把新的分點連成三角形△A"B"C"，依此規則做出無窮多個三角形。若所有正三角形面積和為$50\sqrt{3}$ ，求$\overline{AB}$長。



8. $f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$，若合成函數 $f\circ g(x)=x$，求 $g(x)$。

9. 設 $f(x)=\dfrac{a\sqrt{x^2+5}-b}{x-2}$ ，若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=1$ ，且 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\alpha$ ，試求 $a+b+\alpha$ 之值。

10. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ，試求下列極限值並化簡：**(1)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan 2x}{x-\pi}$ **(2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}}{x}$

11. 已知 $f(x)=x\cdot 2^x$ 為連續函數。試求正整數 k，使得在 k 與 $k+1$ 之間有一實數 c 可滿足 $f(c)=2^{100}$ 。

四、計算證明題

1. 設 n 為正整數，$f(x)=n^3x^3+nx+1$。**(1)**證明 $f(x)$為嚴格遞增函數，即要證明：$a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$。

(2)已知方程式 $f(x)=0$ 恰有一實根，證明此實根介於 0 與$\dfrac{-1}{n}$之間。 **(3)**此方程式的實根為 x_n ，

試求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 。

高 雄 中 學 一 〇 六 學 年 度 第 二 學 期 第 一 次 段 考 數 學 科 答 案 卷 (自 然 組)

三年____班 ____號　姓名______________

一、單選題：(12%)

1.	2.	3.
(3)	(2)	(4)

二、多重選擇題：(每題 5 分，錯 1 個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，錯 3 個以上或未作答皆不給分)

1.	2.	3.	4.
(1)(4)(5)	(1)(4)	(4)(5)	(3)(4)

三、填充題：(60%)

參考計分標準：(註：全對才給分。)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
分數	8	16	22	28	34	40	44	48	52	55	58	60

1.	2.	3.	4.
$e < a = c < b < d$	$0.5\overline{432}$	180	$\frac{7}{4}$
5.	**6.**	**7.**	**8.**
$\frac{5}{7}$	$\frac{1000}{99}$秒	12	$\frac{2x-3}{x-1}$
9.	**10.(1)**	**10.(2)**	**11.**
$\frac{14}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	93

四、計算證明題：(3%)(3%)(2%) (請標示題號)

答：(3) 0