高雄中學 106 學年度第 2 學期 高二第 2 次期中考數學科　試題卷 （自然組）

命題範圍：高二數學輔教 第 13 章 矩陣

說明：請作答在答案卷上，須將答案填入正確欄位，否則不予計分。

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得8分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得2分，其餘情形不給分。共32分。

1. a、b、c、x、y、z 為實數，$A=\begin{bmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ az & bz & cz \end{bmatrix}$，則下列選項何者必定與 A 相等？

(1) $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} x & x & x \\ y & y & y \\ z & z & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$

2. 設 A、B、C 皆為 2 階方陣，I 是 2 階乘法單位方陣，O 是 2 階零方陣，則下列選項何者必定正確？

(1) 若 $AB=BC$，則 $A=C$　(2) 若 $AB=A$，則 $B=I$　(3) 若 $AB=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$，則 A 的乘法反方陣不存在

(4) 若 $AB=I$，則 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$　(5) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

3. $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}$，其中 $a_{ij}=i^2-i\times j$；$B=\left[b_{ij}\right]_{3\times3}$，其中 $b_{ij}=i\times j-j^2$；$C=\left[c_{ij}\right]_{3\times3}=A+B$；$D=\left[d_{ij}\right]_{3\times3}=A-B$；下列選項何者正確？

(1) $B=A^T$　(2) A、B、C、D 之主對角線上(即 $i=j$ 處)所有元素皆為 0　(3) B 為對稱矩陣　(4) C 為反對稱矩陣

(5) D 為反對稱矩陣

4. 設 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，坐標平面上若點 P 經 M 線性變換後得到的點仍為 P，則稱 P 為在 M 作用之下的不動點。下列選項何者可使得在 M 作用之下，除了坐標原點 $O(0,0)$之外，仍有其他不動點存在？

(1) $M=\begin{bmatrix} \cos20^\circ & \sin20^\circ \\ \sin20^\circ & -\cos20^\circ \end{bmatrix}$　(2) $M=\begin{bmatrix} \cos20^\circ & -\sin20^\circ \\ \sin20^\circ & \cos20^\circ \end{bmatrix}$　(3) $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $M=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$　(5) $M=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共 60 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
總得分	*8*	*15*	*22*	*28*	*34*	*39*	*44*	*49*	*53*	*57*	*60*

1. $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 14 & 18 & 22 \\ 26 & 30 & 34 \end{bmatrix}$，若矩陣 X、Y 滿足 $\begin{cases} X+2Y=9A \\ 4X-Y=9B \end{cases}$，則 $Y=$ ＿(A)＿

2. 設$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ a & 1 & 5\\ 1 & 2a & 8\end{bmatrix}$，若 A 不存在乘法反方陣，則 $a=$ __(B)__

3. 已知二階方陣 A 滿足 $A^2=A^5=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{bmatrix}$，則 $A=$ __(C)__

4. $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$，若 $A^9=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，則 $b=$ __(D)__

5. 已知矩陣$\begin{bmatrix}a & b & 1 & 2\\ c & d & 3 & 4\end{bmatrix}$經過一系列列運算後可得$\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$，則矩陣$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=$ __(E)__

6. 小強家附近有 A、B、C、D 四間早餐店，其中 A、B 只賣中式早餐，C、D 只賣西式早餐，小強每天都從這四間早餐店之中選一間店吃早餐，其原則為：若某一天在某間店吃早餐，則隔天必須從其他三間店之中隨機(每間店被選中的機會均等)抽選一間店吃早餐。已知小強於某一週的星期一在 A 早餐店吃早餐，則依此推算該週的星期四小強吃西式早餐的機率為 __(F)__

7. 設$A=\left[a_{i,j}\right]_{100\times100}=\begin{bmatrix}1 & -5 & 11 & -19 & \cdots\\ -3 & 9 & -17 & \cdots & \\ 7 & -15 & \cdots & & \\ -13 & \cdots & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$（$a_{i,j}$ 表示第 i 列第 j 行位置的元素），依此規則類推，則 $a_{5,6}=$ __(G)__

8. 坐標平面上已知直線 $L:y=mx$ 經$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$線性變換後仍為直線 L，則 $m=$ __(H)__

9. x、y、z、p 皆為實數，$A=\begin{bmatrix}x & y\\ z & 2018\end{bmatrix}$，已知 $A=PBP^{-1}$，其中 $P=\begin{bmatrix}1 & 673\\ 3 & p\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，若 $A^{107}+A^{2018}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，則 $d=$ __(I)__

10. 設 $L_1:y=(\tan 67°)x$，$L_2:y=(\tan 37°)x$，點 $P(5,\sqrt{3})$ 對 L_1 的對稱點為 Q，Q 對 L_2 的對稱點為 R，求點 R 的坐標為 __(J)__

11. $A=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$，設 $A^n=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$，其中 n 為正整數，則 a ＝ __(K)__ (以 n 表示)

三、計算證明題：請完整寫出推證過程，若過程不完整則部份給分。共8分。

1. 有一個矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，經由以下列運算之後(每一步皆為一次基本列運算)，可化為 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$：

【第 1 步】: 將 A 的第一列與第二列對調得 A_1；【第 2 步】: 將 A_1 的第三列加上"第一列的 3 倍"成為新的第三列而得 A_2；【第 3 步】: 將 A_2 的第一列加上"第二列的(－2)倍"成為新的第一列而得 A_3；【第 4 步】: 將 A_3 的第三列除以(－2)得到 I。

試問：(1)方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=3 \\ a_3x+b_3y+c_3z=5 \end{cases}$ 的解$(x\ ,\ y\ ,\ z)=$？(4 分)　　(2) 原矩陣 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=$？(4 分)

高雄中學 106 學年度第 2 學期 高二第 2 次期中考數學科　答案卷 （自然組）

得	分

班級：2 年______班　　座號：______　　姓名：_______________

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得8分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得2分，其餘情形不給分。共32分。

1.		2.		3.		4.	

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共 60 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
總得分	*8*	*15*	*22*	*28*	*34*	*39*	*44*	*49*	*53*	*57*	*60*

(A)		(B)		(C)		(D)	
(E)		(F)		(G)		(H)	
(I)		(J)		(K)			

三、計算證明題：請完整寫出計算證明過程，若過程不完整則部份給分。共8分。

1.

To：____________ 師，請指正。

高雄中學 106 學年度第 2 學期 高二第 2 次期中考數學科 答案卷 （自然組） <<參考解答>>

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得8分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得2分，其餘情形不給分。共32分。

1.	234	2.	45	3.	24	4.	135

二、填充題：每題完全答對才給分，依下列配分表計分。共 60 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
總得分	*8*	*15*	*22*	*28*	*34*	*39*	*44*	*49*	*53*	*57*	*60*

(A)	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	(B)	**0 或 -2**	(C)	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$	(D)	-512
(E)	$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -11 \end{bmatrix}$	(F)	$\dfrac{14}{27}$	(G)	-101	(H)	**3**
(I)	**2019**	(J)	$(4,-2\sqrt{3})$	(K)	$\dfrac{2^n+2}{3}$		

三、計算證明題：請完整寫出計算證明過程，若過程不完整則部份給分。共8分。

1. (1) $(1,1,-7)$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

[法一] $\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 3 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{[1]} \left[\begin{array}{ccc|c} a_2 & b_2 & c_2 & 3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{[2]} \left[\begin{array}{ccc|c} a_2 & b_2 & c_2 & 3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ 3a_2+a_3 & 3b_2+b_3 & 3c_2+c_3 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{[3]} \left[\begin{array}{ccc|c} -2a_1+a_2 & -2b_1+b_2 & -2c_1+c_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ 3a_2+a_3 & 3b_2+b_3 & 3c_2+c_3 & 14 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{[4]} \left[\begin{array}{ccc|c} -2a_1+a_2 & -2b_1+b_2 & -2c_1+c_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ \dfrac{3a_2+a_3}{-2} & \dfrac{3b_2+b_3}{-2} & \dfrac{3c_2+c_3}{-2} & -7 \end{array}\right]$ （4 分，每一步驟一分）

由題意可知(x,y,z)的解為$(1,1,\ -7)$ （1 分）

且 $\begin{bmatrix} -2a_1+a_2 & -2b_1+b_2 & -2c_1+c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \dfrac{3a_2+a_3}{-2} & \dfrac{3b_2+b_3}{-2} & \dfrac{3c_2+c_3}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，解得 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ （3 分）

－－－

[法二] $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[4]^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[3]^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[2]^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{[1]^{-1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ （4 分，每一步驟一分）

故 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ （1 分）

將 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$ 代入方程組得 $\begin{cases} y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ -3x - 6y - 2z = 5 \end{cases}$，解得$(x,y,z) = (1,1,\ -7)$ （3 分）

－－－

（上述評分方式僅供參考，請任課教師依實際情況斟酌給分）