

高雄中學 106 學年度第二學期高三第二、三類組數學科期末考試題

範圍：第四章(全)

(請將答案寫在答案卷上，請小心計算，Good Luck!!)

一、 單選題：(每題 5 分共計 10 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題 5 個選項，其中只有 1 個是最適當的選項，畫記在答案卷之「答案欄」。各題答對得 5 分，未作答、答錯、或畫記多於 1 個選項者，該題以零分計算。

1. m 為下列何值，可使不等式 $3x^4 - 4mx^3 + 2m^3 + m^2 - 2m \leq 0$ 無實數解？

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{7}{2}$ (5) $\frac{9}{2}$

2. 設 $f(x) = (x^{2017} + 5x^{2019} - 3x^{2021})^{2015} + x^{2018}$ ，若導函數 $f'(x)$ 奇次項係數和為 k ，則 k 值為

- (1) 2015 (2) 2016 (3) 2017 (4) 2018 (5) 2019

二、 多選題：(每題 5 分共計 10 分)

說明：第 3 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項。選出正確選項，畫記在答案卷之「答案欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分，答錯 1 個選項者，得 3 分，所有選項均未作答或答錯多於 1 個選項者，該題以 0 分計算。

3. 下列各敘述何者正確？

- (1) 若 $f'(a)$ 存在，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續。
(2) 若 $f(x), g(x)$ 為 R 上可微分函數且對任意實數 x 滿足 $f(x) \leq g(x)$ ，則 $f'(x) \leq g'(x)$ 均成立，對任意實數 x 。
(3) 若函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內嚴格遞增，則函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內的導數恆為正數。
(4) 若 $f'(a) = 0$ ，則 $f(a)$ 必為函數 $f(x)$ 局部極值。
(5) 存在可微分函數 $f(x)$ 使得 $f'(x) = [x]$ ，對任意實數 x 。(其中 $[\cdot]$ 為高斯符號)

4. 已知三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ 有兩個極值，分別在 $x = -1$ 與 $x = 1$ 處，且方程式 $f(x) = 0$ 有三個相異實根。下列哪些選項是正確的？

- (1) $f(x)$ 的反曲點為 $(0, 4)$ (2) $b = 0$ (3) 方程式 $f(x) - 8 = 0$ 必定有三個相異實根
(4) 無論 x 之值為何， $f(-x) + f(x)$ 之值必定等於 8 (5) $f(\sqrt{3})$ 之值必大於 0

三、 填充題：(共計 70 分)

5. 若函數 $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^{2018} + \frac{x}{x^2 + 1}$ ，求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$ _____ (A)

6. 若 $f(x) = ax^{10} + bx + 18$ 可被 $(x+1)^2$ 整除，求數對 $(a, b) =$ _____ (B)

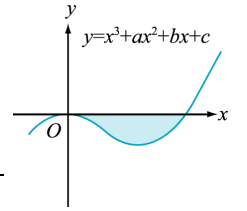
7. 求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} [(4n+1)^3 + (4n+2)^3 + (4n+3)^3 + \cdots + (4n+n)^3] =$ _____ (C)

8. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，已知當切點座標為 $(3, 1)$ 時之切線斜率最小，此時切線通過座標 $(4, 1)$ ，求函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 之法線方程式為 _____ (D)

9. 求曲線 $y = x(x-2)^2 + 2018$ 與 $y = x(x-2) + 2018$ 所圍成區域面積為 _____ (E)

10. 設曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 之圖形如右，且與 x 軸在原點相切，若此切線與曲線所圍的區域的面積為 $\frac{4}{3}$ ，求此區域繞 x 軸旋轉

所得旋轉體體積為 _____ (F)



11. 若函數 $f(x) = 2 \cdot \cos 3x + 9 \cdot \cos 2x - 18 \cdot \cos x$ 之最大值為 M 與最小值為 m ，求數對 $(M, m) =$ _____ (G)

12. 若函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^{x^3} f(t) dt = 2x^9 - 3x^6 + a$ ，求 $f(x)$ 的圖形和 x 軸所圍的區域面積為 _____ (H)

13. 定義兩函數 $f(x) = \int_0^x g(t) dt + 1$ ， $g(x) = 3x^2 - 2x + \int_0^1 [f(t) + g'(t)] dt$ ，則 $f(x) =$ _____ (I)

14. 設 $a, b, c \in R$ ， $a + b + c = 9$ ， $ab + bc + ac = 15$ ，求 abc 最小值為 _____ (J)

四、計算題：(共計 10 分)

1. 若函數 $f(x) = \int_1^x 3(t+1)(t-2) dt$ ， $\forall x \in R$ ，試回答下列問題：

(1) 判斷 $f(x)$ 遞增遞減開區間、相對極值、凹性開區間與反曲點並畫出 $f(x)$ 圖形。(7%)

(2) 試討論方程式 $f(x) = k$ 的實根個數與 k 範圍關係。(3%)