

一、多重選擇題：32% (每題 8 分) (錯 1 個選項得 6 分, 錯 2 個選項得 3 分, 錯 3 個以上得 0 分)

1. 在坐標平面上, 下列五組條件中, 哪幾組恰可決定一圓?

- (1) 過三點  $(1, -3), (2, 6), (4, 24)$  (2) 以  $(1, 0)$  與  $(3, 4)$  為一直徑的兩端點  
 (3) 過四點  $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$  與  $(0, -1)$  (4) 圓心為  $(-1, 2)$  且  $x$  軸與  $y$  軸都相切。  
 (5) 與直線  $x+y-1=0, x$  軸及  $y$  軸都相切。

Ans : (2)(3)

2. 試問在坐標平面上, 下列有關拋物線的敘述哪些是正確的?

- (1) 能夠找到拋物線以  $x$  軸為準線,  $x+y=0$  為對稱軸。  
 (2) 能夠找到拋物線以  $x$  軸為準線, 頂點是  $(1, 1)$ , 焦點是  $(1, 2)$ 。  
 (3) 能夠找到拋物線以  $x$  軸為準線, 焦點是  $(2, 2)$ , 且通過  $(3, 3)$ 。  
 (4) 能夠找到拋物線以  $x$  軸為準線, 且通過  $(3, 3), (-3, 4)$ 。  
 (5) 能夠找到拋物線以  $x$  軸為準線,  $y$  軸為對稱軸, 且通過  $(3, 3), (-3, 3)$ 。

Ans : (2)(4)(5)

3. 已知平面上橢圓的兩焦點為  $(6, 0)$  及  $(0, 8)$ , 長軸長 20, 則下列敘述哪些是正確的?

- (1)  $(3, 4)$  為橢圓的中心 (2) 短軸的斜率為  $\frac{3}{4}$  (3)  $(9, -4)$  為長軸上的一個頂點  
 (4) 橢圓與正  $x$  軸只有一個交點 (5) 短軸之長為  $10\sqrt{3}$

Ans : (1)(2)(3)(4)(5)

4. 平面上兩點  $F_1, F_2$  滿足  $\overline{F_1F_2} = 4$ 。設  $d$  為一實數, 令  $\Gamma$  表示平面上滿足  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = d$  的所有  $P$  點所成的圖形, 又令  $C$  為平面上以  $F_1$  為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確的?

- (1) 當  $d = 0$  時,  $\Gamma$  為直線  
 (2) 當  $d = 1$  時,  $\Gamma$  為雙曲線  
 (3) 當  $d = 2$  時,  $\Gamma$  與圓  $C$  交於兩點  
 (4) 當  $d = 4$  時,  $\Gamma$  與圓  $C$  交於四點  
 (5) 當  $d = 8$  時,  $\Gamma$  不存在

Ans : (1)(2)(5)

二、填充題：68%

1. 已知  $(3, -1), (5, 1)$  為圓  $C$  一弦之兩端點, 而此弦與圓心距離為  $3\sqrt{2}$ , 求圓  $C$  之方程式。(2 解)

Ans :  $(x-7)^2 + (y+3)^2 = 20$  或  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$

2. 方程式： $(|x|-1)^2 + (|y|-2)^2 \leq 5$ , 求此圖形所圍成區域之面積。

Ans :  $10\pi + 16$

3. 直線  $L: 4x + 3y + a = 0$ , 圓  $C: x^2 + y^2 + 6x + my + n = 0$ , 若直線  $L$  與圓  $C$  相切於點  $(1, 4)$ , 求序對  $(a, m, n)$ 。

Ans :  $(-16, -2, -15)$

4. 已知坐標平面上的四個點， $A(-1, 2)$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(1, 2)$ ,  $D(x, y)$ ，其中  $D$  為  $\overline{AB}$  中點與  $\overline{BC}$  中點的連線段的中點。設有一拋物線通過  $A$ 、 $D$ 、 $C$  三點，則此拋物線的焦點坐標為\_\_\_\_\_。

$$Ans : (0, \frac{5}{4})$$

5. 在拋物線  $y^2=12x$  上求一點  $P$  使得  $P$  到焦點與定點  $A(5, 4)$  之距離和  $\overline{PF} + \overline{PA}$  為最小,  $P$  點坐標為\_\_\_\_\_。

$$Ans : (\frac{4}{3}, 4)$$

6. 拋物線  $y=f(x)$  過三點  $(-1, 0)$ ,  $(-9, 0)$ ,  $(0, 9)$ ，求焦點坐標。

$$Ans : (-5, -\frac{63}{4}),$$

7. 橢圓  $\Gamma : \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 6$ ，求長軸頂點坐標。

$$(\frac{7}{5}, -\frac{23}{10}), (-\frac{17}{5}, \frac{13}{10})$$

8. 求與橢圓  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  共焦點且過點  $(3, 2)$  的橢圓方程式。

$$Ans : \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$$

9. 設動點  $P$  到  $F(1, 0)$  的距離為到直線  $x=4$  距離的  $\frac{1}{2}$  倍，求  $P$  點的軌跡方程式。

$$Ans : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

10. 試求以  $(2, -2)$ ,  $(-2, 2)$  為焦點，貫軸長為 2 的雙曲線方程式。  
(化為  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ )

$$Ans : 3x^2 - 8xy + 3y^2 = 7$$

11. 一雙曲線與橢圓  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$  共焦點而貫軸長 2，求其方程式。

$$Ans : \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

12. 試求雙曲線  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  上任一點  $P$  到二漸近線之距離乘積的值。

$$Ans : \frac{144}{25}$$