

一、多重選擇題：32% (每題 8 分) (錯 1 個選項得 6 分, 錯 2 個選項得 3 分, 錯 3 個以上得 0 分)

1. 在坐標平面上, 下列五組條件中, 哪幾組恰可決定一圓?

- (1) 過三點 $(1, -3)$, $(2, 6)$, $(4, 24)$ (2) 以 $(1, 0)$ 與 $(3, 4)$ 為一直徑的兩端點
 (3) 過四點 $(1, 0)$ 、 $(-1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 與 $(0, -1)$ (4) 圓心為 $(-1, 2)$ 且 x 軸與 y 軸都相切。
 (5) 與直線 $x+y-1=0$, x 軸及 y 軸都相切。

Ans : (2)(3)

2. 試問在坐標平面上, 下列有關拋物線的敘述哪些是正確的?

- (1) 能夠找到拋物線以 x 軸為準線, $x+y=0$ 為對稱軸。
 (2) 能夠找到拋物線以 x 軸為準線, 頂點是 $(1, 1)$, 焦點是 $(1, 2)$ 。
 (3) 能夠找到拋物線以 x 軸為準線, 焦點是 $(2, 2)$, 且通過 $(3, 3)$ 。
 (4) 能夠找到拋物線以 x 軸為準線, 且通過 $(3, 3)$, $(-3, 4)$ 。
 (5) 能夠找到拋物線以 x 軸為準線, y 軸為對稱軸, 且通過 $(3, 3)$, $(-3, 3)$ 。

Ans : (2)(4)(5)

3. 已知平面上一橢圓的兩焦點為 $(6, 0)$ 及 $(0, 8)$, 長軸長 20, 則下列敘述哪些是正確的?

- (1) $(3, 4)$ 為橢圓的中心 (2) 短軸的斜率為 $\frac{3}{4}$ (3) $(9, -4)$ 為長軸上的一個頂點
 (4) 橢圓與正 x 軸只有一個交點 (5) 短軸之長為 $10\sqrt{3}$

Ans : (1)(2)(3)(4)(5)

4. 平面上兩點 F_1, F_2 滿足 $\overline{F_1F_2} = 4$ 。設 d 為一實數, 令 Γ 表示平面上滿足 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = d$ 的所有 P 點所成的圖形, 又令 C 為平面上以 F_1 為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確的?

- (1) 當 $d = 0$ 時, Γ 為直線
 (2) 當 $d = 1$ 時, Γ 為雙曲線
 (3) 當 $d = 2$ 時, Γ 與圓 C 交於兩點
 (4) 當 $d = 4$ 時, Γ 與圓 C 交於四點
 (5) 當 $d = 8$ 時, Γ 不存在

Ans : (1)(2)(5)

二、填充題：68%

1. 已知 $(3, -1)$, $(5, 1)$ 為圓 C 一弦之兩端點, 而此弦與圓心距離為 $3\sqrt{2}$, 求圓 C 之方程式。(2 解)

Ans : $(x-7)^2 + (y+3)^2 = 20$ 或 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$

2. 方程式： $(|x|-1)^2 + (|y|-2)^2 \leq 5$, 求此圖形所圍成區域之面積。

Ans : $10\pi + 16$

3. 直線 $L: 4x + 3y + a = 0$, 圓 $C: x^2 + y^2 + 6x + my + n = 0$, 若直線 L 與圓 C 相切於點 $(1, 4)$, 求序對 (a, m, n) 。

Ans : $(-16, -2, -15)$

4. 已知坐標平面上的四個點， $A(-1, 2)$, $B(0, 0)$, $C(1, 2)$, $D(x, y)$ ，其中 D 為 \overline{AB} 中點與 \overline{BC} 中點的連線段的中點。設有一拋物線通過 A 、 D 、 C 三點，則此拋物線的焦點坐標為_____。

$$Ans : (0, \frac{5}{4})$$

5. 在拋物線 $y^2 = 12x$ 上求一點 P 使得 P 到焦點與定點 $A(5, 4)$ 之距離和 $\overline{PF} + \overline{PA}$ 為最小, P 點坐標為_____。

$$Ans : (\frac{4}{3}, 4)$$

6. 拋物線 $y = f(x)$ 過三點 $(-1, 0)$, $(-9, 0)$, $(0, 9)$ ，求焦點坐標。

$$Ans : (-5, -\frac{63}{4}),$$

7. 橢圓 $\Gamma : \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 6$ ，求長軸頂點坐標。

$$(\frac{7}{5}, -\frac{23}{10}), (-\frac{17}{5}, \frac{13}{10})$$

8. 求與橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 共焦點且過點 $(3, 2)$ 的橢圓方程式。

$$Ans : \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$$

9. 設動點 P 到 $F(1, 0)$ 的距離為到直線 $x=4$ 距離的 $\frac{1}{2}$ 倍，求 P 點的軌跡方程式。

$$Ans : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

10. 試求以 $(2, -2)$, $(-2, 2)$ 為焦點，實軸長為 2 的雙曲線方程式。
(化為 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$)

$$Ans : 3x^2 - 8xy + 3y^2 = 7$$

11. 一雙曲線與橢圓 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ 共焦點而實軸長 2，求其方程式。

$$Ans : \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

12. 試求雙曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上任一點 P 到二漸近線之距離乘積的值。

$$Ans : \frac{144}{25}$$