高雄中學 107 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科　試題卷 （自然組）

命題範圍：高三數學 3-1 數列的極限與無窮等比級數、3-2 函數的概念、3-3 函數的極限

說明：1. 請作答在答案卷上，須將答案填入正確欄位，否則不予計分。

2. 若題目未特別註明，則本卷中之函數其變數值與函數值皆預設為實數，其定義域預設為能找得到對應函數值之所有變數值形成的集合。

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得8分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得2分，其餘情形不給分。共32分。

1. 設 $a_n=\dfrac{1}{x+3}\times(\dfrac{3x+6}{1-2x})^n$，$n\in N$。則 x 為下列何者時，會使得數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂？

(1) -7　(2) -4　(3) -3　(4) -1　(5) 2

2. 下列選項何者必定正確？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+1}$ 不存在。

(2) 若數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂，$\langle b_n\rangle$ 發散，則數列 $\langle a_n\cdot b_n\rangle$ 必發散。

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 必定為 0。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{3^2})(1-\dfrac{1}{4^2})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{1}{2}$

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{C_2^n}=2$

3. 設函數 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$，則下列選項何者必定正確？

(1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在

(2) $f(x)$ 在區間 $(-\infty,0)$ 為連續函數

(3) 無論 k 為任何實數，方程式 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=k$ 在區間 $(1,2)$ 必定有實根

(4) 無論 k 為任何實數，方程式 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=k$ 必定有兩個實根

(5) $f(x)$ 在區間 $(1,2)$ 為遞減函數

4. 下列選項何者必定正確？

(1) $f(x)=\begin{cases}a,\ if\ \ x=0\\ \dfrac{|x|}{x},\ if\ \ x\neq0\end{cases}$，無論實數 a 值為何，$f(x)$ 在 $x=0$ 處都不連續。

(2) $f(x)=\begin{cases}1,\ if\ \ x=0\\ \dfrac{\sin x}{x},\ if\ \ x\neq0\end{cases}$ 為連續函數。

(3) 若 $f(x)$ 是奇函數，則 $f(x)$ 必定是一對一函數。

(4) $f(x)=x\cdot(2^x-\dfrac{1}{2^x})$ 是偶函數。

(5) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在區間 $(0,\infty)$ 是遞增函數。

二、填充題：依下列配分表計分，共 60 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
總得分	*8*	*15*	*22*	*28*	*34*	*39*	*44*	*48*	*52*	*56*	*60*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)-1}{x}=$ __(A)__

2. 函數 $f(x)=(-1)^{[x]}(x-[x]-\frac{1}{2})$，若 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=a$ ， $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=b$ ，則數對 $(a,b)=$ __(B)__ (其中[ ]為高斯符號)

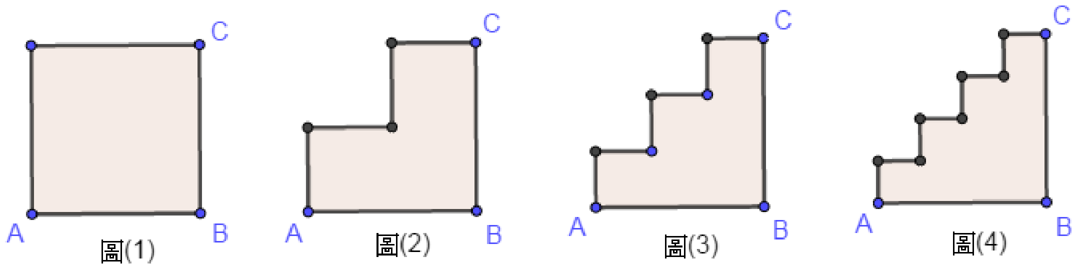
3. 已知無窮等比級數 $1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots=0.7\overline{2}$ ，則 $r=$ __(C)__

4. 函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+5}，若x不是整數\\ 3，若x是整數\end{cases}$ ， $g(x)=x^2+3$ ，則 $\lim\limits_{x\to 1} f(g(x))=$? __(D)__

5. 當 n 為正整數時，令 $x^2+2nx-3n=0$ 之兩根為 a_n 、 b_n ，且 $a_n>b_n$ ，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ __(E)__

6. 函數 $f(x)=\sqrt{-\left|x^2-4\right|+3x}$ 之定義域為 __(F)__ (寫成集合或區間的形式都可以)

7. 如下圖，每個圖中 $\angle B$ 皆為 90 度且 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$ 。在圖(n)中沿著 $\overline{AC}$ 有 n 個一模一樣的等腰直角小台階，其外沿轉折線段與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 形成封閉圖形(也就是說，將三角形 ABC 之斜邊 $\overline{AC}$ 等分成 n 小段，以每一小段為斜邊向外作等腰直角三角形)。下方呈現前四個圖的例子，依此類推。設圖(n)之周長為 T_n ，面積為 S_n ，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n+S_n)=$ __(G)__



8. 實數 a、b 滿足 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{ax}-\sqrt{b}}=3$ ，則數對 $(a,b)=$ __(H)__

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=$ __(I)__

10. $\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{2}{3\times4\times5}+\dfrac{3}{4\times5\times6}+\cdots=$ __(J)__

11. 有一遊戲由甲乙雙方進行，每回合甲獲勝的機率皆為 $\dfrac{2}{3}$ ，乙獲勝的機率皆為 $\dfrac{1}{3}$ ，任一方若能連贏兩回合則遊戲結束並由該方贏得遊戲，若遊戲未結束則繼續進行下一回合。則甲贏得遊戲的機率為 __(K)__

三、計算證明題：請使用黑色墨水筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 8 分。

1. (1) 證明：對於任意正整數 k，不等式 $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\dfrac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ 必定成立。(3 分)

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1\times n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\times n}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n\times n}}\right)=$? (5 分)

高雄中學 107 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科　答案卷 （自然組）

班級：3 年______班　　座號：______　　姓名：______________

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得8分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得2分，其餘情形不給分。共32分。

1.		2.		3.		4.	

二、填充題：依下列配分表計分，共 60 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
總得分	*8*	*15*	*22*	*28*	*34*	*39*	*44*	*48*	*52*	*56*	*60*

(A)		(B)		(C)		(D)	
(E)		(F)		(G)		(H)	
(I)		(J)		(K)			

三、計算證明題：請使用黑色墨水筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 8 分。

1. (1) 證明：對於任意正整數k，不等式

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$ 必定成立。 (3分)

答：

1. (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1\times n}}+\frac{1}{\sqrt{2\times n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\times n}}\right)=$ ？(5分)

答：

To：____________ 師，請指正。

高雄中學 107 學年度第 2 學期 高三第 1 次期中考數學科 <<參考解答>> （自然組）

一、多重選：每題至少有一個正確選項。每一題完全答對得8分，只答錯一個選項者得5分，只答錯兩個選項者得2分，其餘情形不給分。共32分。

1.	24	2.	135	3.	1235	4.	124

二、填充題：依下列配分表計分，共 60 分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
總得分	*8*	*15*	*22*	*28*	*34*	*39*	*44*	*48*	*52*	*56*	*60*

(A)	-10	(B)	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	(C)	$-\frac{5}{13}$	(D)	$\frac{1}{9}$
(E)	$\frac{3}{2}$	(F)	$1\le x\le 4$	(G)	$\frac{9}{2}$	(H)	$(-8,16)$
(I)	$-\frac{1}{2}$	(J)	$\frac{1}{4}$	(K)	$\frac{16}{21}$		

三、計算證明題：請使用黑色墨水筆在欄位內作答，並詳述過程，依作答內容完整度斟酌給分。共 8 分。

1. (1) 證明：對於任意正整數k，不等式

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$ 必定成立。 (3分)

答：對於任意大於或等於1的實數k(包含正整數)，

都有 $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}>\sqrt{k}+\sqrt{k}>\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$，

因此$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\dfrac{1}{2\sqrt{k}}<\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$

分母有理化得$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\dfrac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$，得證。

1. (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{1\times n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\times n}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n\times n}})=$？(5分)

答：2。(若只有答案對，沒有過程或過程錯誤則只給1分)

由(1)，$2(\sqrt{2}-\sqrt{1})<\dfrac{1}{\sqrt{1}}<2(\sqrt{1}-\sqrt{0})$ ……①

$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$ ……②

……

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ ……ⓝ

將n個算式相加，分項對消得

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{0})$$

$$\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{1\times n}}+\frac{1}{\sqrt{2\times n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\times n}}<\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{0})}{\sqrt{n}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{n}-\sqrt{0})}{\sqrt{n}}=2$，

依夾擠定理，$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{1\times n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\times n}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n\times n}})=2$

(若使用積分方法且過程正確也可以)