

高雄市高雄高級中學 107 學年度第二學期高二第二次段考自然組數學試題

一、複選題(每題 6 分，錯一個給 3 分，錯兩個以上不給分)

1. 設 $A = [a_{ij}]_{8 \times 8}$, $B = [b_{ij}]_{8 \times 8}$, $C = [c_{ij}]_{8 \times 8}$ ，若 $a_{ij} = i^2 + 2j$ ， $A = B + C$ 且 $B^T = B$ ， $C^T = -C$ ，則下列敘述那些為真？

(A) $\sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^8 a_{ij}$ 大於 2100

(B) $\sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^8 a_{ij}$ 大於 $\sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^8 b_{ij}$

(C) $\sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^8 c_{ij} = 0$

(D) $a_{55} = b_{55}$

(E) $b_{47} > 43$

2. 設 A, B, C 為二階方陣， I 為二階單位方陣，則下列敘述何者為真？

(A) 若 $AB = C$ 且 $\det A \neq 0$ ，則 $B = CA^{-1}$

(B) $\sum_{k=1}^5 \det(kA) = 15 \det(A)$

(C) 若 A 為轉移矩陣，則 $\frac{1}{16}(A+I)^4$ 亦為轉移矩陣

(D) 若 A 為轉移矩陣，且 $A \neq I$ ， $\det(A) \neq 0$ ，則 A^{-1} 必不為轉移矩陣

(E) 若 P, Q 為平面上二相異點，則經 A 變換後得 P', Q' 亦為平面上二相異點

3. 設 $A(\sqrt{3}, 1)$ ， $B(-1, \sqrt{3})$ 為座標平面上兩點經二階方陣 M 之線性變換後變換為 $A'(0, 4)$ ， $B'(-4, 0)$ ，則下列敘述那些為真？

(A) 點 $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 經 M 變換後的點會落在第一象限

(B) 設點 C 為 y 軸上一點且 C 經 M^3 變換為點 C' ，則點 C' 必落在 y 軸上

(C) 設 O 為原點且 D 經 M 變換為點 D' ，若 $\overline{OD} = 2$ ，則 $\overline{DD'} > 3$

(D) 滿足 M^n 為以原點為伸縮中心的伸縮變換之最小正整數 n 為 3

(E) 若 Q 為半徑為 2 的圓上異於 A, B 的點且經 M 變換為 Q' ，則 $\Delta A'B'Q'$ 的面積必小於 20

二、填充題

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ ，試求 AB

2. 設矩陣 A, B 滿足 $A + B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $A^T - B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & 4 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}$, 若 $B = [b_{ij}]$, 試求 $b_{12} + b_{23} = ?$

3. 設 $A = [a_{ij}]_{10 \times 10}$, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} i & i \geq j \\ j & i < j \end{cases}$, 試求 A 之所有元總和?

4. 今將三元一次聯立方程式 $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + az = 4 \\ 3x + by - z = c \end{cases}$ 之增廣矩陣做列運算得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 試求數對 (a, b, c) 之值

5. 將矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & -a & 1 & 0 \\ b & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 做數次列運算得矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -12 & 19 \end{bmatrix}$, 則聯立方程式 $\begin{cases} 3x - ay = 3 \\ bx - 5y = 1 \end{cases}$ 的解為何?

6. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, 試求 $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2018} = ?$

7. 設 $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, 若滿足 $A^{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的所有 θ 總和為 k° , 試求 k 值

8. 設 $a, m \in R$, 若平面變換 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 將直線 $2x - 3y = 7$ 變換成直線 $mx + 5y = -7$, 試求數對 (a, m)

9. 一袋中有編號 1, 2, 3, 4 共四顆球, 今每次從袋中取出兩顆球紀錄其數字和後並放回袋中(假設任兩個號碼被取到的機會均相等), 如此繼續 n 次, 設 a_n 表示記錄到 n 次時, 點數和為奇數的機率; b_n 表示記錄到 n 次時,

點數和為偶數的機率, 若方陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$, 則

(1) $A = ?$,

(2) $a_4 = ?$

(3) 設 $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 若 $P^{-1}A^4P = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$, 試求數對 (r, s)

(4) 若 $a_{10} = \frac{1}{2} - q\left(\frac{1}{k}\right)^{10}$, $q, k \in N, q \leq 1000$, 試求數對 (q, k) 之值

10. 科霸學了矩陣運算後把地圖上的點和空間中的點做一個對應, 首先他找了一個矩陣 $M_{3 \times 2}$ 滿足點 $(3, 1)$ 和點 $(5, 2)$ 經 $M_{3 \times 2}$ 過變換後依序對應成點 $(1, 2, 3)$ 和點 $(-2, -3, -1)$, 若今天點 (m, n) 對應成點 $(7, 12, 11)$, 試求數對 (m, n)

11. 平面上將點 $A(10, -5)$ 先以原點為中心逆時針旋轉 90° 後, 再對直線 $y = 2x$ 作鏡射得點 B , 求 B 之座標

12. 設 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$ 且 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, 求滿足 $(AB)^{-1}$ 不存在之 θ 個數

高雄市高雄高級中學 107 學年度第二學期高二第二次段考自然組數學答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、複選題(每題 6 分，錯一個給 3 分，錯兩個以上不給分)

1. ACDE	2. C	3. BCE
---------	------	--------

二、填充題

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
總分	8	16	24	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	79	82

1. $\begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$	2. (3,2)	3. 715	4. $(6, \frac{3}{2}, 4)$
5. (-7,-3)	6. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	7. 108	8. (1,3)
9(1). $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	9(2). $\frac{40}{81}$	9(3). $(1, \frac{1}{81})$	9(4). (512,6)
10. (-1,-1)	11. (5,10)	12. 7	