高雄中學107學年度第二學期期末考二年級自然組數學科試題

一、單一選擇題：第1題至第3題，每題選出最適當的一個選項，將答案寫在答案卷上對應題號的空格內。

1. 直角坐標平面上,拋物線$\Gamma: x^2=4y$的焦點為F,已知Γ上有一點P滿足$\overline{PF}$=4, 則P到直線$L: y=-4$的距離為

   (1)4 (2)5 (3)6 (4)7 (5)8

2. 直角坐標平面上,下列哪一個方程式的圖形可以放進一個夠大的橢圓裡面?

   (1) $x^2+2y^2=1$ (2) $x^2-2y^2=1$ (3) $x=1$ (4) $y^2=x^2$ (5) $y=x^2$

3. 在坐標空間中,將連接(1,0,0) 與(0,0,1) 兩點的直線L,繞z軸旋轉而得一直圓錐面Ω,假設平面E的方程式為$2019x+z=108$,則Ω與E相交所得的圖形為下列何者?

   (1) 拋物線 (2) 橢圓 (3) 雙曲線 (4) 一直線 (5) 兩相交直線

二、多重選擇題：第4題至第6題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，將答案寫在答案卷上對應題號的空格內。

4. k為實數,直角坐標平面上,考慮方程式$\Gamma: kx^2+2kx+(1-k)y^2=0$的圖形,下列敘述何者為真?

   (1) 若k=2019,則Γ為雙曲線 (2) 若0<k<1,則Γ為橢圓 (3) 若Γ為兩平行直線,則k=1
   (4) 若k=0,則Γ為一點 (5) 不論k之值為何, Γ不可能為拋物線

5. 直角坐標平面上,自點$P(2,0)$作圓$C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$的兩條切線, 分別切圓C於A、B兩點,下列敘述何者正確?

   (1) $\overline{PA}$=1 (2) $\cos(\angle APB)=\dfrac{3}{5}$ (3) $\triangle PAB$ 的外接圓之直徑長為$\sqrt{5}$

   (4) 過點$Q(3,2)$且與直線PA、直線PB均相切的圓有兩個,一個是圓C,另一個是圓$C': (x+3)^2+(y-10)^2=100$

   (5) 圓C上,與P點距離最遠的點為$(1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 2+\dfrac{4}{\sqrt{5}})$

6. 設二個實數常數a、b滿足$a^2>b^2>0$。在直角坐標平面上,有一直線$L: ax+by=0$,則下列各方程式的圖形中,何者與L恰交於兩相異點?

   (1) $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ (2) $x^2+y^2=1$ (3) $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ (4) $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\dfrac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

   (5) $\sqrt{x^2+(y-\sqrt{a^2-b^2})^2}+\sqrt{x^2+(y+\sqrt{a^2-b^2})^2}=2|a|$

三、填充題：第7題至第18題為填充題，將答案寫在答案卷上對應題號的空格內。

7. 直角坐標平面上,圓C過$A(1,2)$、$B(3,-2)$二點,且$\overline{AB}$之弦心距為$\sqrt{5}$,若圓C的圓心在第一象限,則圓C的圓心坐標為__________。

8. 直角坐標平面上,拋物線Γ的頂點為(1,2), 焦點為(-1,2), 則拋物線Γ的方程式為______。(答案以配方後的標準式表示)

9. 直角坐標平面上,橢圓Γ有一焦點$(2+\sqrt{5},1)$,長軸的一頂點為(5,1),短軸長為4, 則橢圓Γ的方程式為__________。(答案以配方後的標準式表示)

10. 直角坐標平面上,雙曲線Γ的兩焦點為(0,6)、(0,-4), 且Γ過點$(\dfrac{16}{3},6)$,則雙曲線Γ的方程式為__________。(答案以配方後的標準式表示)

11. 直角坐標平面上,求過點 $A(4,2)$ 且與圓 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 相切之直線方程式為________。(答案展開化簡成一般式)

12. 直角坐標平面上,有一橢圓 Γ_1 與一雙曲線 Γ_2 有共同的焦點 F_1、F_2,且 Γ_1、Γ_2 的正焦弦長皆相同。設 P 為此橢圓與雙曲線的一個交點,且 $\overline{PF_1}$=4、$\overline{PF_2}$=6, 若「Γ_1 的短軸長」是「Γ_2 的共軛軸長」的 k 倍,求值: k =________ 。

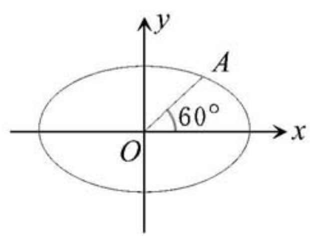
13. 直角坐標平面上,已知雙曲線 Γ 的兩焦點為(-2,4)、(-2,-2) ,其一漸近線斜率為 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,若點 $A(3,t)$ 在 Γ 上,則 A 到兩焦點距離差的絕對值為________。

14. 直角坐標平面上,滿足不等式 $(x-1)^2+(|y|-1)^2\le 2$ 的所有點 (x,y) 所形成之圖形的面積為________ 。

15. 史上最著名的隕石撞擊地球事件,是「希克蘇魯伯事件」:6500 萬年前直徑 10 公里的隕石猛烈撞擊現今墨西哥猶加敦半島,導致地球氣候變遷,恐龍因而滅絕。隕石在接近地球時的拋物線速度一般約為每秒 42 公里,如果它迎頭撞上地球,每秒速度高達 72 公里,天文學界在 1990 年代就開始組成專業團隊,監督天上的危險天體。

假設有一隕石接近地球,天文學家訂定一個直角坐標平面,算出此隕石軌跡為拋物線 $\Gamma: y^2=16x$,並於同一坐標平面上,在地球外緣劃定一直線 $L:4x+3y+19=0$ 做為警戒線,則 Γ 軌跡上的點到 L 的最短距離為________ 。

16. 哈雷彗星是著名的短周期彗星,每隔 75 年就能從地球上看見,下次預計西元 2061 年又能看到它。
哈雷彗星的軌道為一橢圓型,太陽為此橢圓的一焦點,其半長軸長約為 17.8AU(天文單位)、半短軸長約為 4.19AU。
天文迷雄雄將其橢圓型軌道經縮小變形繪製於直角坐標平面上(參考右圖) ,使其方程式為 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 $60°$ 的直線在第一象限跟橢圓相交於 A,則 $\overline{OA}$ 之長為________。



17. 直角坐標平面上,有一圓 C 過點 $A(1,0)$ 且其圓心在拋物線 $y^2=2x-1$ 上,已知圓 C 上的所有點中,離 y 軸最遠的距離為 $\dfrac{10}{9}$,則過點 A 且與圓 C 相切的切線斜率為________。

18. 直角坐標平面上,點 $F_1(4,0)$、$F_2(8,9)$, Γ 表雙曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 的圖形 $x>0$ 之部份。已知「與 Γ 有交點」且「以 F_1、F_2 為焦點」的橢圓有無限多個,求這些橢圓中, 正焦弦長的最小值為________。

高雄中學 107 學年度第二學期期末考二年級自然組數學科　答案卷

班級：二年______組　　座號：______　　姓名：______________

依下列配分表計分。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
總得分	8	16	23	32	40	48	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100

1	(4)	2	(1)	3	(3)	4	(1)(3)(5)
5	(1)(3)(4)(5)	6	(2)(5)	7	(4, 1)	8	$(y-2)^2=-8(x-1)$
9	$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$	10	$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$	11	$7x-24y+20=0$ 或 $x=4$	12	$\sqrt{5}$
13	4	14	$3\pi+2$	15	2	16	$\frac{4}{\sqrt{5}}$
17.	$\pm\frac{4}{3}$	18.	$\frac{24}{11}$				