高雄中學107學年度第一學期數學科第二次段考題目卷

一、 填充選擇題(80分)

說明：本大題共有13題，依量尺給分。填充題全對才給分；選擇題皆為多重選擇題，答錯一個選項算答對半題，兩個或兩個以上不給分。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。

1. 已知$\tan 17^\circ 50' = 0.3217$、$\tan 17^\circ 40' = 0.3185$，若$90^\circ < \theta < 270^\circ$，且$\tan\theta = -0.3209$，則試求$\theta$的角度。

2. 地面上有兩個觀測站A, B，相距3000公尺，同時對一架正在飛行的飛機C進行測量，仰角分別為$30^\circ, 45^\circ$，而飛機上的觀測者對兩觀測站的視角($\angle ACB$)為60°，若飛機飛行的高度為$\dfrac{3000}{\sqrt{a-2\sqrt{b}}}$公尺，則數對$(a,b)$。

3. 令$A(a,4),\ B(5,b),\ C(12,5),\ O(0,0)$，若$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OC}$方向的正射影向量相同，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 114$，試求數對$(a,b)$。

4. 若$A(6,1),\ B(11,13),\ C(\dfrac{2t+3}{5}, t+2)$，$t \in R$。若$\Delta ABC$有最小周長為$b$，試求$b$值。

5. (　　　) 下列何者與 $\Gamma: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 3-2t \end{cases},\ t \ge 0$ 表示同一數學物件？(多選題)

(A) $\Gamma_1: \begin{cases} x = 1+6t \\ y = 3-4t \end{cases},\ t \in R$　(B) $\Gamma_2: \begin{cases} x = 7+3t \\ y = -1-2t \end{cases},\ t \ge 0$　(C) $\Gamma_3: \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 5-2t \end{cases},\ t \ge 1$

(D) $\Gamma_4: 2x+3y-11=0$　(E) $\Gamma_5: \begin{cases} 2x+3y-11=0 \\ x \ge 1 \end{cases}$

6. 已知x, y為實數，滿足$x^2+9y^2-2x+36y=88$，若$x+6y+3$的最大值為M、最小值為m，試求數對(M,m)。

7. (　　　) 關於『平面向量』的相關敘述，下列何者正確？(多選題)

(A)若平面向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 滿足 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|<\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$，則 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 的夾角為鈍角。

(B)若 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 為兩非零的平面向量，則對於任意平面向量 $\overrightarrow{u}$，皆存在實數 x,y，使得 $\overrightarrow{u}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$。

(C)已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 皆為非零的平面向量，且兩兩不平行。若實數 x,y,z 滿足 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，則 $x=y=z=0$。

(D)已知 $\overrightarrow{b}$ 為一非零平面向量，若平面向量 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 方向的投影量為 k，則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 方向的正射影向量 $\overrightarrow{v}=k\overrightarrow{b}$。

(E)已知 $\overrightarrow{b}$ 為一非零平面向量，若平面向量 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 方向的正射影向量為 $\overrightarrow{v}$，則 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{b}=0$。

8. 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=\sqrt{5},\overline{AC}=\sqrt{6}$，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$。若 D 為 $\overline{BC}$ 上一點，且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$。假設 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 (x,y)。

9. 在 ΔABC 中，$\overline{AB}=4,\ \overline{AC}=6,\ \overline{BC}=5$。有一直線通過 ΔABC 的內心 I，並與 $\overline{AB},\ \overline{AC}$ 分別交於 P,Q 兩點。若 $\overline{AP}=x\overline{AB}$、$\overline{AQ}=y\overline{AC}$ 且 $\dfrac{\Delta APQ}{\Delta ABC}=\dfrac{2}{5}$，試求 $4x^2+9y^2$。

10. (　　　) 下列哪些直線方程式滿足：過點 $(2,3\sqrt{3})$ 且與直線 $\sqrt{3}x+y=5$ 夾 30° 角？(多選題)

(A) $x=2$。　(B) $y=3\sqrt{3}$。　(C) $x+\sqrt{3}y-11=0$。

(D) $x-\sqrt{3}y+7=0$。　(E) $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$。

11. xy 平面上，$L_1:2x+y+1=0$、$L_2:x+2y-1=0$、$L_3:2x-y-1=0$。若 L_1,L_2 的交點為 A、L_2,L_3 的交點為 B、L_1,L_3 的交點為 C，則 A,B,C 形成一個三角形。試求 $\angle A$ 的內角平分線與 $\angle B$ 的外角平分線交點坐標 (x_0,y_0)。

12. 在 ΔABC 中，P,Q,R 為 $\overline{BC}$ 的四等分點（$B-P-Q-R-C$），D 為 $\overline{AC}$ 中點。若 $\overline{BD}$ 分別跟 $\overline{AP},\overline{AR}$ 交於 E,F，試求 $\overline{BE}:\overline{EF}:\overline{FD}$（請化為最簡單整數比）。

13. 已知有一個農場由三座高塔 A,B,C 圍成一個三角形，其中 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$，若農場主人田僑仔由農場內部一點 P 往三座高塔進行測量，經測量後發現點 P 到三高塔塔底的直線距離分別為 $6,8,10$ 公里，試求此農場面積(平方公里)。

二、 計算證明題(20 分)

說明：請詳細寫下計算過程或證明。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。

I. (1)試證：已知 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 為兩個不平行的非零平面向量，若實數 x,y 滿足 $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$，則 $x=y=0$。(5 分)

(2)已知平面上 O,A,B 三點不共線，則對於平面上任意一點 C，必存在實數 x,y 使得 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$。

試證：A,B,C 三點共線 $\Leftrightarrow$ $x+y=1$（兩個方向都要證，每個方向 5 分）

II. 已知向量 (a,b) 是直線 $ax+by+c=0$ 的法向量。

(1)若點 $P(x_0,y_0)$ 為直線 $L:ax+by+c=0$ 外一點，試證：點 P 到直線 L 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。(5 分)

〈試題結束〉