

※請用原子筆將答案寫在答案卷上，並將答案化簡後再填入

一、是非題：試判斷下列各題敘述是否有錯。對的劃記○；錯的劃記×

( ) 1.  $k$  為負數，則不等式  $k(x^2 - 3x - 10) < 0$  的解為  $-2 < x < 5$ 。

( ) 2. 不等式  $\frac{x-2}{x+3} \leq 0$  的解與不等式  $(x-2)(x+3) \leq 0$  的解相同。

( ) 3.  $f(x)$  和  $g(x)$  皆為實係數多項式。若兩不等式  $f(x) > 0$  和  $g(x) > 0$  有相同的實數解，則不等式  $f(x) < 0$  和  $g(x) < 0$  亦有相同的實數解。

( ) 4.  $f(x)$  和  $g(x)$  皆為實係數多項式。若  $f(x) > g(x)$  恆成立，則不等式  $f(x) > 0$  和  $g(x) > 0$  不會有相同的實數解。

( ) 5.  $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ ，其中  $\alpha, \beta$  為相異實數。

令集合  $A = \{x \mid f(x) < 0, x \text{ 為實數}\}$ ，集合  $B = \{x \mid f(x^3) < 0, x \text{ 為實數}\}$ ，則  $B \subset A$ 。

二、填充題：

1. 試解不等式  $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4(x-5)^5(x-6)^6 > 0$

2. 若函數  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x + 1}$  的定義域為  $\mathbb{R}$ ，試求  $f(x)$  的最小值。

3. 不等式  $(x^2 - x - 6)(x^2 + 3x - 4) + 24 < 0$  有幾個整數解？

4. 有一個數列為  $\frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{1}, \frac{9}{2}, \frac{11}{3}, \frac{13}{1}, \frac{15}{2}, \frac{17}{3}, \frac{19}{4}, \dots$ 。試求此數列的第 100 項。

5. 兩等差數列  $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ ，其前  $n$  項的和分別為  $A_n, B_n$ 。若  $A_n : B_n = (2n + 1) : (5n - 3)$ ，求  $a_7 : b_7$  之最簡比例。

6. 三數成等差數列。若此三數依序分別減掉 1, 14, 3，則成等比數列，且新三數的和為 78。求原三數。

高雄中學一〇七學年度第一學期第三次段考高一數學科試卷

7. 李同學參加儲蓄存款，年利率為 5%，每年複利一次。若李同學在每年年初都存入 10000 元，則在第 10 年年底時結算的本利和有多少元？( $1.05^{10} \doteq 1.629$ )

8. 若  $2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \cdots + 60^3 + \alpha^2 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \cdots + 61^3$ ，試求  $\alpha$  的值。

9. 數列  $\langle a_n \rangle$  恆滿足  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2$ ，試化簡  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 。

10.  $i = \sqrt{-1}$ ，試求  $\sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2k}$  之值並化簡。

11. 已知級數和  $1 \cdot (2n-1) + 3 \cdot (2n-3) + 5 \cdot (2n-5) + \cdots + (2n-1) \cdot 1$  可表示成  $an^3 + bn^2 + cn + d$ ，其中  $n \in \mathbb{N}$ ， $a, b, c, d$  為常數。試求  $a + 2b + 3c + 4d$  之值。

12. 數列  $\langle a_n \rangle$  的遞迴關係式為  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$ ，試求  $\sum_{k=1}^{10} k(a_k + 1)$  之值並化簡。

13. 數列  $\langle a_n \rangle$  的遞迴關係式為  $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n - 2}{2a_n - 1} \end{cases}$ ，試求  $a_{50}$  之值。

14. 數列  $\langle a_n \rangle$  的遞迴關係式為  $\begin{cases} a_1 = 2 \\ na_{n+1} = (n+2)a_n \end{cases}$ ，若  $\sum_{k=1}^n a_k > 1125$ ，試求  $n$  之最小正整數值。

15. 平面上有 11 條相異直線，任兩條都不平行、且任三條都不共點。試問這 11 條直線將平面分割成多少個不互相重疊的區域？

16. 由 1,2,3,4,5 組成的七位數中，沒有出現 1 相鄰的數共有幾個？

(如 1213512 為所求數之一，但 2145112、3111452 出現 1 相鄰皆不是所求數)

三、勘誤題：底下是用數學歸納法做的證明。試判斷證明過程是否有錯誤並回答；如果①~⑦之中有錯誤的話，請將錯誤挑出並修正之。

試證： $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+n\sqrt{(n+2)^2}}}} = 3, \forall n \in \mathbb{N}$

證明：1. 當  $n=1$  時，左式  $= \sqrt{(1+2)^2} = 3$ ，成立 ..... ①

2. 設  $n=k$  時成立，即  $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+k\sqrt{(k+2)^2}}}} = 3$  ..... ②

當  $n=k+1$  時，

左式  $= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+k\sqrt{1+(k+1)\sqrt{(k+3)^2}}}}}$  ..... ③

$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+k\sqrt{1+(k+1)(k+3)}}}}$  ..... ④

$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+k\sqrt{k^2+4k+4}}}}$  ..... ⑤

$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+k\sqrt{(k+2)^2}}}}$  ..... ⑥

$= 3$

所以  $n=k+1$  時亦成立

3. 由數學歸納法知，

$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+n\sqrt{(n+2)^2}}}} = 3, \forall n \in \mathbb{N}$  ..... ⑦

高雄中學一〇七學年度第一學期第三次段考高一數學科答案卷

一年\_\_\_\_班\_\_\_\_號 姓名\_\_\_\_\_

一、是非題：10%(每題2分)

1.	2.	3.	4.	5.
×	×	×	×	×

二、填充題：84%(請按照題號作答，填錯格子不給分，全對才給分。未化簡亦不給分)

計分標準：

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
分數	10	20	30	40	50	60	63	66	69	72	74	76	78	80	82	84

1.	2.	3.	4.
$1 < x < 3, x > 5$ 但 $x \neq 2, x \neq 6$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{199}{9}$
5.	6.	7.	8.
27 : 62	7,32,57 或 55,32,9	132090	$\pm 341$
9.	10.	11.	12.
$\frac{n}{2n+1}$	$-1+i$	$\frac{5}{3}$	18434
13.	14.	15.	16.
$\frac{100}{99}$	15	67	63040

三、勘誤題：(6%)

沒有錯誤
------

