高雄市立高雄高級中學108學年度第一學期高三自然組第一次段考數學科試題

請注意以下事項：

一、請用藍色或黑色原子筆將答案書寫至答案卷，$\boxed{\text{嚴禁}}$使用鉛筆作答。

二、試卷空白處可作為計算，不得使用另外使用計算紙。

三、計分方式請參閱答案卷。

1. 已知隨機變數X的機率分布滿足$P(\{X=0\})=1-P(\{X=1\})$，若$E(X)=3Var(X)$，試求$P(\{X=0\})$之值。
（請小心計算，全對才給分）

2. 假設兩隨機變數X,Y滿足$E(X)=2,\ Var(X)=4,\ E(Y)=1,\ Var(Y)=4, E(XY)=10$，試求隨機變數$(X+Y)^2$的期望值。

3. 假設袋子中有大小相同紅、黃、藍三種顏色的球共100個，若一次取兩顆球，則取到紅色球個數的期望值為0.6顆球;若一次取五顆球，則取到黃色球個數的期望值為1.2顆球，試問箱子中共有幾顆藍色球。

4. 有100元1個、200元2個、300元3個、400元4個的紅包袋，由小費、小喬、小納以及小瑞共四人依序各抽取1個紅包袋，$\boxed{\text{抽取後放回}}$。若每個紅包袋被抽取的機會相等，試求小費、小喬、小納以及小瑞共四人的紅包金額總和的$\boxed{\text{變異數}}$。

5. 投擲一顆不公正的骰子一次，假設隨機變數X表示出現的點數，下表為X的機率質量函數分佈，試求p之值。

X	1	2	3	4	5	6
$f(X)$	$p-3p^2$	p	p	$p-2p^3$	$p-3p^3$	$p-5p^3$

（請小心計算，全對才給分）

6. 已知隨機變數$X\sim B(10,\frac{1}{2})$，若μ,σ分別為隨機變數X的期望值與標準差，試求$P(\mu-2\sigma\le X\le \mu+\frac{1}{2}\sigma)$之值。

7. 小費和小納兩位老師想要了解第一次高三自然組數學科段考成績的不及格率，小費老師抽測了x位學生、小納老師$(x+30)$位學生來進行檢驗，所得到的不及格率分別為P_1與P_2，已知$P_1+P_2=1$，且小費老師所得到的95%信賴區間長度為小納老師所得到的95%信賴區間長度的$\frac{3}{2}$倍，試求小費老師所進行的抽樣學生人數。

8. 在網球大滿貫賽事開始前，小費選手想要預測入場觀眾對自己的支持度，試問小費至少需要成功調查幾個人，才能在95%信心水準下，使得支持度的信賴區間長度不大於0.0625。

9. 若擲一顆公正骰子一次，若<u>擲到1、4點則視為成功，否則即為失敗</u>。已知A箱摸彩箱內有100元4張、200元1張以及300元1張，B箱摸彩箱內有350元、900元以及1000元各1張。今擲一顆公正骰子，若<u>成功</u>則可在A箱中抽取一張作為獎金並獲得再擲一次骰子(且一定要擲)的機會。若<u>再成功</u>，則可將在A箱中所獲得的獎金投入B箱，再進行抽取一張作為獎金;若失敗，則以在A箱中所抽取的獎金作為獎金。這樣進行一輪稱為一局，試問進行一局的獎金期望值。

~尚有試題~

10. 從 $1,3,5,7,\cdots,19$ 等 10 個數字中，任取三個相異數字，假設隨機變數X為三個相異數中第二大的數字，試求隨機變數X的期望值。

11. 將 6 個相異的球任意分配到 4 個不同的箱子，假設隨機變數X為非空箱的個數，試求隨機變數X的期望值。

12. 『川劇變臉』為一項技術性極高的表演，表演者要在觀眾面前，不留痕跡地變換臉上的臉譜。今小費特地準備了 6 個男性臉譜與 4 個女性臉譜，打算完全展現他的 10 個臉譜變臉戲法。試求小費在表演過程中，『性別轉換』的次數期望值。

13. 6 個人進行剪刀、石頭、布的猜拳遊戲一次 ，假設隨機變數X為淘汰人數，試求$E(X)$之值。

14. 擲一顆公正骰子，若出現連續二次$\boxed{\text{相同點數}}$即停止投擲，假設隨機變數X為投擲次數，試求$E(X)$之值。

15. 已知多項式$f(x)=C_1^{11}2^{10}+(2C_2^{11}2^9\cdot 3^1)x+(3C_3^{11}2^8\cdot 3^2)x^2+(4C_4^{11}2^7\cdot 3^3)x^3+\cdots+(11C_{11}^{11}3^{10})x^{10}$，試求當$x$為幾次方時，其係數會有最大值。

~試題結束~

高雄市立高雄高級中學108學年度第一學期高三自然組第一次段考數學科試題

班級：__________ 座號：__________ 姓名：___________得分：___________

請注意以下事項：

一、請用藍色或黑色原子筆將答案書寫至答案卷，嚴禁使用鉛筆作答。

二、試卷空白處可作為計算，不得使用另外使用計算紙。

三、計分方式請參閱答案卷。

答對格數	1	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	10	20	29	38	46	54	**60**	66	72	78	84	90	94	97	100

答案欄

1. $\frac{1}{3}$ 或 1 （全對才給分）	2. 33	3. 46	4. 40000	5. $\frac{1}{5}$（多寫$\frac{1}{2}$不計分）
6. $\frac{627}{1024}$	7. 24	8. 1024	9. 100	10. 10
11. $\frac{3367}{1024}$	12. $\frac{24}{5}$	13. $\frac{62}{81}$	14. 7	15. 6

高雄市立高雄高級中學108學年度第一學期高三自然組第一次段考數學科試題

班級：__________ 座號：__________ 姓名：__________得分：__________

請注意以下事項：

一、請用藍色或黑色原子筆將答案書寫至答案卷，$\boxed{\text{嚴禁}}$使用鉛筆作答。

二、試卷空白處可作為計算，不得使用另外使用計算紙。

三、計分方式請參閱答案卷。

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	10	20	29	38	46	54	60	66	72	78	84	90	94	97	100

答案欄

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.
11.	12.	13.	14.	15.

參考簡答：

1. 假設$P(\{X=1\})=p$　$\therefore P(\{X=0\})=1-p$
$\therefore E(X)=p,\ Var(X)=p(1-p)$
$\because E(X)=3\,Var(X)$　$\therefore p=0,\ \frac{2}{3}$　∴所求為 $\frac{1}{3}$ 或 1

2. $\because \begin{cases} E(X^2)=Var(X)+\big(E(X)\big)^2=4+2^2=8 \\ E(Y^2)=Var(Y)+\big(E(Y)\big)^2=4+1^2=5 \end{cases}$
$\therefore E((X+Y)^2)=E(X^2+2XY+Y^2)=E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)=33$

3. 假設紅球有a個，黃球有b個　$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{100}\times 2=0.6 \\ \frac{b}{100}\times 5=1.2 \end{cases}$　$\Rightarrow \begin{cases} a=30 \\ b=24 \end{cases}$　∴藍球有 46 個

4. 假設隨機變數X_i為第i個人的紅包金額
∵取後放回　∴獨立
∴所求$=Var(X_1)+Var(X_2)+Var(X_3)+Var(X_4)$
$\because Var(X_1)=E(X_1^2)-\big(E(X_1)\big)^2=\left(\frac{1}{10}\times 100^2+\frac{2}{10}\times 200^2+\frac{3}{10}\times 300^2+\frac{4}{10}\times 400^2\right)-\left(\frac{1}{10}\times 100+\frac{2}{10}\times 200+\frac{3}{10}\times 300+\frac{4}{10}\times 400\right)^2=10000$
所求$=10000\times 4=40000$

5. 所求:$6p-3p^2-10p^3=1\Rightarrow(5p-1)(2p-1)(p+1)=0$。
$\therefore\ \ p=\frac{1}{5},\frac{1}{2},-1$　但$p=\frac{1}{2}$ 代入 $p-3p^2<0$　不合
$\therefore\ \ p=\frac{1}{5}$

6. $\because E(X)=np=5,\ \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\frac{\sqrt{10}}{2}$
所求
$$P\left(\mu-2\sigma\le X\le \mu+\frac{1}{2}\sigma\right)=P\left(5-\sqrt{10}\le X\le 5+\frac{\sqrt{10}}{4}\right)=P(\{X=2\})+P(\{X=3\})+P(\{X=4\})+P(\{X=5\})$$
$$=\frac{627}{1024}$$

7. 所求：$2\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{x}}=\frac{3}{2}\left(2\sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{x+30}}\right)\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{9}{4}(\frac{1}{x+30})$　$\therefore x=24$。

8. 所求：$max\left\{4\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}:0\le p\le 1\right\}\le 0.00625$　$\therefore n\ge 1024$。

9. 所求：$\frac{2}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{400+200+300}{6}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{\frac{400+200+300}{6}+350+900+1000}{4}\right)=100$。

10. 法一：所求$E(X)=\sum_{k=2}^{9}(2k-1)P(\{X=2k-1\})=\sum_2^9(2k-1)\frac{C_1^{k-1}C_1^{10-k}}{C_3^{10}}=10$。
法二：假設所取之三個數，隔出 4 個空間，平均放入 7 個球，每個空間平均放入$\frac{7}{4}$個球。
則第二大的數排在第$\left(\frac{7}{4}+1\right)\times 2=\frac{11}{2}$個位置
故為$2\times\frac{11}{2}-1=10$

11. 法一：利用定義。
法二：E(非空箱)$=4-E$(空箱)$=4-\left(\frac{3}{4}\right)^6\times 4=\frac{3367}{1024}$

12. 法一：利用定義。
法二：所求$=\left(\frac{\frac{8!}{5!3!}\times 2}{\frac{10!}{6!4!}}\right)\times 9=\frac{24}{5}$

13. 法一：利用定義。

法二：所求$=\frac{C_1^3(2^5-1)}{3^6}\times 6=\frac{62}{81}$

14. 試題類似 105 學年度第一次高三自然組段考試題第 11 題

假設所求之期望值為E

故$E=\frac{1}{6}\times 2+\frac{5}{6}(E+1)$ $\quad\therefore E=7$

15. 試題類似 106 學年度第一次高三自然組段考試題第 10 題、105 學年度第一次高三社會組段考試題第 N 題

所求$f(x)=11[C_0^{10}2^{10}+C_1^{10}2^9 3^1 x+C_2^{10}2^8 3^2 x^2+\cdots+C_{10}^{10}3^{10}x^{10}]=5^{10}\times 11\left[C_0^{10}(\frac{2}{5})^{10}+C_1^{10}(\frac{2}{5})^9(\frac{3}{5})^1 x+C_2^{10}(\frac{2}{5})^8(\frac{3}{5})^2 x^2+\cdots+C_{10}^{10}(\frac{3}{5})^{10}x^{10}\right]$。

故係數為$C_0^{10}(\frac{2}{5})^{10},\ C_1^{10}(\frac{2}{5})^9(\frac{3}{5})^1,\ C_2^{10}(\frac{2}{5})^8(\frac{3}{5})^2,\ldots,\ C_{10}^{10}(\frac{3}{5})^{10}$

由二項試驗可知$p=\frac{2}{5}$ 或 $\frac{3}{5}$

故最大值會發生在第$[(n+1)p]=4$ 或 6 項

但$\frac{C_6^{10}(\frac{2}{5})^4(\frac{3}{5})^6}{C_4^{10}(\frac{2}{5})^6(\frac{3}{5})^4}=\frac{9}{4}>1$ 故係數最大值發生在第 6 項