# 高雄中學 108 學年度第二學期第一次期中考高一數學科試題

**※作答須使用黑色或藍色的原子筆書寫，除作圖外不得使用鉛筆。**

## 一、多選題（占 24 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項依照題號填入答案卷之『指定答案欄』當中。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 試選出正確的選項。
   (1) 方程式 $4^x+4^{-x}=2^{-|x|}+1$ 恰有 1 個實根
   (2) 方程式 $4^x+4^{-x}=2^{|x|}+2$ 恰有 2 個實根
   (3) 方程式 $2\cdot x^3-3\cdot x^2-3\cdot x+2=0$ 恰有 3 個實根
   (4) 方程式 $2\cdot 2^{3x}-3\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0$ 恰有 3 個實根
   (5) 方程式 $2\cdot(2^x+2^{-x})^3-3\cdot(2^x+2^{-x})^2-3\cdot(2^x+2^{-x})+2=0$ 恰有 3 個實根

2. 坐標平面上，圓 $C$ 的方程式為 $x^2+y^2-8x+6y+16=0$，直線 $L$ 的方程式為 $x+y+(\sqrt{2}-1)=0$，試選出正確的選項。
   (1) 圓 $C$ 上恰有 10 個點與直線 $L$ 的距離為正整數
   (2) 圓 $C$ 上恰有 4 個點與直線 $L$ 的距離為 2 的正整數次方
   (3) 圓 $C$ 上恰有 8 個點與 $L$ 的距離為 2 的整數次方
   (4) 若直線 $L$ 與圓 $C$ 交於 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則 $x_1+x_2+y_1+y_2=2+\sqrt{2}$
   (5) 若直線 $L_1$、$L_2$ 均與直線 $L$ 平行且與圓 $C$ 相切，切點分別為 $P(x_3,y_3)$、$Q(x_4,y_4)$，則 $x_3x_4+y_3y_4=16$

3. 試就 $k$ 的值討論坐標平面上方程式 $C_1: x^2+y^2=(k+2)^2$ 與 $C_2:(x-6)^2+(y-8)^2=9(2-k)^2$ 所代表的圖形。
   (1) 若 $-1<k<\dfrac{7}{2}$，圖形 $C_1$ 與 $C_2$ 不相交且互不包含
   (2) 恰有 2 個實數 $k$ 使得圓 $C_1$ 與圓 $C_2$ 外切
   (3) 恰有 2 個實數 $k$ 使得 $C_1$ 與 $C_2$ 各自所圍成的圖形內部面積相等
   (4) 當 $C_1$ 與 $C_2$ 各自所圍成的圖形內部面積相等時，兩圖形不相交
   (5) 各自計算兩方程式所圍成的圖形內部面積並相加，最小值為 $16\pi$

## 二、填充題（占 64 分）

說明：第 4 至 11 題，請將正確答案依照題號填入答案卷之『指定答案欄』當中。每題完全答對得 8 分。

4. 若 $\alpha,\beta$ 為方程式 $x^2-\sqrt[3]{32}x+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=0$ 的兩根、$\gamma,\delta$ 為方程式 $x^2-8x+6=0$ 的兩根，

   則 $\alpha^\gamma\cdot\alpha^\delta\cdot\beta^\gamma\cdot\beta^\delta\cdot\left((\alpha+\beta)^\gamma\right)^\delta=$__________。

5. 若 $a^{2x}=2+\sqrt{2}$，則 $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=$___________。(請化簡至 $\dfrac{q+r\sqrt{s}}{p}$ 的形式，$p,q,r,s$ 為整數)

6. 設 $f(x)=(\dfrac{1}{2})^{x}-3$，且 $a<-2<b$，令 $k_1=\dfrac{f(a)+f(-2)}{2}$、$k_2=\dfrac{f(b)+f(-2)}{2}$、$k_3=f(\dfrac{a+(-2)}{2})$、$k_4=f(\dfrac{b+(-2)}{2})$，

則 $k_1$、$k_2$、$k_3$、$k_4$ 的大小順序為___________。

7. 坐標平面上，$P(x,y)$ 為直線 $3x+y=4$ 上任意一點，令 $k=(\dfrac{1}{27})^{x}+(\dfrac{1}{3})^{y}$，則 $k$ 之最小值為___________。

8. 坐標平面上，$P$ 點在圓 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 上，$Q$ 點坐標為 $(-4,-2)$，$R$ 點在 $PQ$ 直線上且滿足 $\overline{PR}:\overline{QR}=2:1$ 的所有 $R$ 點所構成的軌跡方程式為___________。

9. 設 $P(x,y)$ 為坐標平面上滿足不等式 $x^2+y^2-4x-2y-4\le 0$ 之點坐標，其中 $x\ge 0$、$y\ge 0$，

則前述所有 $P$ 點投影在直線 $L:\dfrac{x}{12}-\dfrac{y}{6}=1$ 上所得之線段長為___________。

10. 坐標平面上，圓 $\Gamma$ 之方程式為 $(x-3)(x-3)+(y-1)(y+9)=0$。若直線 $L_1:x-3y=7$ 與直線 $L_2:x+2y=2$ 交於 $P$ 點，$L_1$ 與 $\Gamma$ 交於 $A$、$B$ 兩點，$L_2$ 與 $\Gamma$ 交於 $C$、$D$ 兩點，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}\times\overline{PC}\times\overline{PD}=$___________。

11. 坐標平面上，$P$ 點為方程式 $x^2+y^2-12x-8y+50=0$ 圖形上一點，$Q$ 點為方程式 $2x-y=3$ 圖形上一點，$R$ 點為方程式 $y=0$ 圖形上一點，則 $\overline{PQ}+\overline{QR}$ 之最小值為___________。

## 三、計算證明題（占 12 分）

| 說明：第 12 題，請將答案寫在答案卷之『指定答案欄』當中，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。每一子題配分標於題末，各子題完全答對得 12 分。 |
| --- |

12.(1) 已知圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=$，$P(x_0,y_0)$ 為圓 $C$ 上一點。

試證明過 $P$ 點且與圓 $C$ 相切之直線方程式為 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$。(8 分)

(2) 坐標平面上，圓 $C$ 的方程式為 $x^2+y^2+2x+6y-10=0$，若過切點 $P(x_0,y_0)$ 的切線與 $x-2y+1=0$ 垂直，則 $P$ 點坐標為___________。(4 分)

# 高雄中學 108 學年度第二學期第一次期中考高一數學科答案卷

班級：______ 座號：______ 姓名：______________

## 一、多選題（占 24 分）

| 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|
| (1)(2)(3) | (1)(2)(5) | (1)(2)(3) |

## 二、填充題（占 64 分）

| 4. | 5. | 6. | 7. |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{4}$ | $\dfrac{12+17\sqrt{2}}{14}$ | $k_1>k_3>k_2>k_4$ | $\dfrac{2}{9}$ |

| 8. | 9. |
|---|---|
| $\left((x+2)^2+(y+1)^2-\frac{1}{9}\right)\left((x+10)^2+(y+5)^2-1\right)=0$ | $3+\sqrt{5}$ |

| 10. | 11. |
|---|---|
| 225 | $6-\sqrt{2}$ |

## 三、計算證明題（占 12 分）

12.(1)

令圓 $C$ 之圓心為 $O(h,k)$

當 $x_0\neq h$ 、 $y_0\neq k$ 時，$\overleftrightarrow{PO}$ 之斜率為 $\dfrac{y_0-k}{x_0-h}$ ，過 $P$ 之切線斜率為 $-\dfrac{x_0-h}{y_0-k}$

過 $P$ 之切線方程式為 $(y-y_0)=-\dfrac{x_0-h}{y_0-k}(x-x_0)$ ，化簡為 $(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)=0$

又 $P(x_0,y_0)$ 在圓 $C$ 上，$(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=r^2$

兩式相加 $(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)+(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=r^2$

$\Rightarrow\quad (x_0-h)\left[x-x_0+x_0-h\right]+(y_0-k)\left[y-y_0+y_0-k\right]=r^2$

$\Rightarrow\quad (x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$

當 $x_0=h$ 時，過 $P$ 之切線方程式為 $y=y_0$ ，恰與欲證明之公式符合，說明如下：

將 $x_0=h$ 代入 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$ 得 $(y_0-k)(y-k)=r^2=(y_0-k)^2$

$\Rightarrow\quad y-k=y_0-k$

$\Rightarrow\quad y=y_0$

當 $y_0=k$ 時，過 $P$ 之切線方程式為 $x=x_0$ ，恰與欲證明之公式符合，說明如下：

將 $y_0=k$ 代入 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$ 得 $(x_0-h)(x-h)=r^2=(x_0-h)^2$

$\Rightarrow\quad x-h=x_0-h$

$\Rightarrow\quad x=x_0$

註：未說明無斜率狀況，扣 2 分。無斜率狀況可只討論 $y_0=k$

12.(2)

$P$ 點坐標為 $(3,-1)$ 或 $(-5,-5)$