108學年度高雄中學第二學期數學科高三自然組第一次期中考題目卷

第一部分：複選題(每題10分，每個選項獨立計分，各2分。此部分共30分)

1. 試問下列哪些選項中的敘述哪些正確？

(1)若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$存在，則$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(2)若$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，則$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$存在。

(3)若$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$，且$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$存在，則$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

(4)已知$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$，對於任意自然數$n$，定義$a_n = f(n)$。若$\lim_{n\to\infty} a_n = L$，則$\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = L$

(5)若數列$\langle a_n \rangle$滿足$\begin{cases} a_1 = 6 \\ \dfrac{a_{n+1} - 9}{a_n} = a_n - 5,\ \forall n \in N \end{cases}$，則$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

2. 試問下列哪些選項中的函數為奇函數？

(1)$\dfrac{(x^5 + x^3 - x)(\tan x + \sin x)}{x^3 - \cot x}$

(2)$\dfrac{5^x - 5^{-x}}{\cos x}$

(3)$\log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

(4)$[x - [x]]$，其中[·]為高斯符號

(5)$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

3. 試問下列哪些選項中的函數在指定點上為連續？

(1) 函數：$x[x]$、指定點：$x = 3$

(2) 函數：$\dfrac{x^3 - x^2}{|x|}$、指定點：$x = 0$

(3) 函數：$2\log_2|\sqrt{1+x} - 1| - \log_2|\sqrt{1+x^2} - 1|$、指定點：$x = 0$

(4) 函數：$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$、指定點：$x = 0$

(5) 函數：$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$、指定點：$x = 0$

第二部分：複選題(每題 6 分，此部分共 48 分)

4. 試求極限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=$ ______________

5. 求無窮級數：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{7^n}=$ __________

6. 若 $f(x)$ 為一實係數三次多項式，滿足 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^3-1}=-\frac{5}{3}$ 、 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=8$，試求多項式 $f(x)=$ _________

7. 假設 $f_0(x)=\frac{x-1}{x}$；定義 $f_n=f_0(f_{n-1}(x))$，若 $f_{2020}(x)=\frac{2019}{2018}$，則 $x=$ ________

8. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，試求極限：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=$ ______________

9. 對於所有自然數 n，定義點 $P_n\left(\sqrt{n+7},\sqrt{n-3}\right)$ 到直線 $x-y=0$ 的距離為 d_n，則試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot d_n=$ __________

10. 已知在空間中兩向量 $\vec{a},\vec{b}$ 滿足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，且 $\vec{a},\vec{b}$ 之夾角為 $\frac{\pi}{4}$，試求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=$ _____________

11. 令面積為 1 的正 n 邊形的周長為 L_n，則試求 $\lim\limits_{n\to\infty}L_n$

第三部分：計算證明題(第一題 10 分，第二題 12 分，此部分共 22 分)

12. 令 $f(x)=3x^5-5x+1$ 、 $h(x)=8x^4-7$，試證明在 $[0,1]$ 間存在一實根。(10 分)

13. 定義 $a_n=\sqrt[n]{n}$，試證明以下兩小題：

(1)令 $a_n=1+h_n$，利用二項式定理，證明 $n\geq\frac{n(n-1)}{2}{h_n}^2$ (8 分)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ (4 分)