高雄中學 108 學年度第二學期高二第二、三類組數學科第二次月考試題

範圍：矩陣(全)

(請將答案寫在答案卷上，請小心計算，Good Luck!!)

一、多選題:(每題 10 分共計 20 分)

說明：每題有 5 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項。選出正確選項，寫在答案卷之「答案欄」。各題之選項獨立判定，每個選項答對得 2 分，每題共計 10 分。

1. 下列各敘述何者正確？

(A)由 2 個 1，2 個 2，5 個 3 所組成的三階方陣共有 1260 個.

(B)設方陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{10\times 10}$，若 $a_{ij}=i^2+j^2$，則 A 中一切元之總和為 3850.

(C)設 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & \ldots \\ 2 & 3 & 8 & 15 & \ldots \\ 5 & 6 & 7 & 14 & \ldots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$（$n\ge 7$），則 $a_{57}=45$.

(D)若 A,B 為二階轉移矩陣，則 $\dfrac{3}{4}A^{2020}B^{109}+\dfrac{1}{4}B^{109}A^{2020}$ 亦為二階轉移矩陣.

(E)若 A,B 反矩陣均存在，則 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.

2. 設 $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$且已知 $A=PBP^{-1}$，下列敘述何者正確？

(A) $A^2-3A-2I=O$　(B) $A^4-7A^3+10A^2-8A+3I=\begin{bmatrix} -37 & 36 \\ -24 & 23 \end{bmatrix}$　(C) $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $A^{2020}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2^{2020} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$　(E) $A^{-1}=\dfrac{1}{4}(A^3-6A^2+13A-12I)$

二、填充題:(共計 70 分)

1. 解方程組 $\begin{cases} 2y+4z+6u=12 \\ x+y+4z+2u=1 \\ x+2z-u=-5 \end{cases}$ 先利用列運算將增廣矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ 化簡成 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求數對 $(a,b,c)=$ ___(A)___

2. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 且 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，試求 $(A+I)(A^2-A+I)=$ ___(B)___（請完整寫出矩陣內所有元素）

3. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$，若 $A^{109}=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ 且 $\dfrac{a_{31}}{109\cdot 2^{108}}=a$，求 $a=$ ___(C)___

4. 小杰計畫帶老婆環台旅行，將旅費放置保險箱中，且保險箱密碼為 $abcd$，已知小杰將密碼 $abcd$ 記做一個二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且滿足 $A^3=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$，$A^5=\begin{bmatrix} 41 & 29 \\ 58 & 41 \end{bmatrix}$，試求密碼 $abcd=$____(D)____

5. 小杰帶老婆環台旅行，打算遊走於台北、台中、墾丁、花蓮等四地，兩人旅遊共識是若當夜宿於某地時，翌日早晨醒來，絕不留在原地，且小杰老婆要求說若當天夜宿花蓮則隔天絕對不去台中夜宿，假設到達各地機率均等，若小杰與老婆第一天夜宿於台中，求小杰與老婆第四天夜宿墾丁的機率為__(E)__

6. 小杰與老婆在飯店裡玩遊戲，遊戲開始時小杰與老婆各自準備了一個袋子放有鈔票，其中小杰袋中有二張 1000 元鈔票，老婆袋中有三張 500 元鈔票，**遊戲規則為兩人分別各自從自己袋中取出一張鈔票交換到對方袋子，稱為一局**，若局數一直進行下去且袋中鈔票趨於穩定，求小杰袋中有 1500 元鈔票機率為___(F)___

7. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ 且 C 為三階方陣，滿足 $ACA+BCB=ACB+BCA+I$，其中 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求矩陣 $C=$____(G)____（請完整寫出矩陣內所有元素）

8. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，若 $(A-I)^{-1},\ (A+I)^{-1}$ 均不存在，求數對 $(x,y)=$____(H)____

9. 在座標平面上點 $P_1=(1,1)$ 經過線性變換 $A=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ 的變換下得 P_2，再將 P_2 經過線性變換 A 的變換下得出 P_3，將此過程以此類推即 P_n 經過線性變換 A 的變換下得出 P_{n+1}，$\forall n\in N$，若 $P_{109}=(a,b)$，試求 $\log_2 a=$____(I)____

10. 設 $a,b\in R$，已知在 $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ 所定義的線性變換之下，把直線 $L:4x+5y-5=0$ 變換到另一直線 $L':x+2y-5=0$，若將平面座標點 $P=(\frac{20}{7},\frac{5}{7})$ 經過矩陣 A 轉換下，再對直線 $y=2x$ 鏡射後的點為 Q，再將點 Q 繞原點逆時針旋轉 30^0 後所得的點為 S，求 S 座標為____(J)____

11. 在坐標平面上，已知直線 $y=mx$ 將區域 $\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1, y\geq 0\right\}$ 分成兩個區域 S_1,S_2，已知兩區域 S_1,S_2 面積比為 $5:7$，求 $m=$___(K)___

12. 若二階矩陣序列$\{A_n\}$滿足: $A_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$A_{n+1}=PA_n+Q$，($n=1,2,3,\cdots$)，其中$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，當$n\geq 2$時，試求出矩陣序列$A_n$的一般表達式為___(L)___(請完整寫出矩陣內所有元素)

二、計算證明題:(10 分)

1. 設A是二階方陣，且A非零矩陣，$S=\{X\text{為二階方陣}\mid AX=2XA\}$，試回答以下問題:

(1)若$X,Y\in S$且a,b為任意實數，試證明: $aX+bY\in S$.

(2)若$X,X^2\in S$，試證明: X^{-1}不存在.

(3)若$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，求集合$S$.

高雄中學 108 學年度第二學期高二第二、三類組數學科第二次月考答案卷

____年____組　　姓名:__________________　　座號:_______

一、多選題:(20%)(每個選項答對得 2 分，每題共計 10 分)

1.	CD	2.	BCD

二、填充題:(70%)

1 格	2 格	3 格	4 格	5 格	6 格	**7 格**	8 格	9 格	10 格	11 格	12 格
10 分	20 分	30 分	38 分	46 分	54 分	**60 分**	63 分	66 分	68 分	69 分	70 分

(A) $(2,-1,-5)$	(B) $\begin{bmatrix}-10 & -3 & -12\\ 36 & -19 & 0\\ -9 & -9 & -19\end{bmatrix}$	(C) 83	(D)1121	(E) $\frac{5}{18}$
(F) $\frac{3}{5}$	(G) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	(H) $(-3,-2)$	(I)108	(J)$(\frac{-7+\sqrt{3}}{2},\frac{1+7\sqrt{3}}{2})$
(K) $\frac{8+4\sqrt{3}}{5}$或$\frac{-8-4\sqrt{3}}{5}$	(L) $\begin{bmatrix}-2+7\cdot 2^{n-2} & 5\cdot 2^{n-2}\\ -2+7\cdot 2^{n-2} & 5\cdot 2^{n-2}\end{bmatrix}$			

二、計算證明題:(10%)

1. (3%)(1)pf:若 $X,Y\in S$ ，則 $AX=2XA, AY=2YA$.

$\because A(aX+bY)=A(aX)+A(bY)=aAX+bAY=2aXA+2bYA=2(aX+bY)A.\quad \forall a,b\in R.$

$\therefore aX+bY\in S.$

(3%)(2) $\because X,X^2\in S\quad \therefore AX=2XA$ ， $AX^2=2X^2A$

於是 $AX^2=(AX)X=(2XA)X=2X(AX)=2X(2XA)=4X^2A$ 所以 $2X^2A=4X^2A$. 故得 $X^2A=O$.

假設 X^{-1}存在， $X^{-1}X^{-1}X^2A=X^{-1}X^{-1}O=O$, 但是 $X^{-1}X^{-1}X^2A=X^{-1}(X^{-1}X)XA=X^{-1}XA=A$.

由上等式得出 $A=O$（矛盾). 所以 X^{-1}不存在.

(4%)(3)設 $X=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}\in S$ ，則 $AX=2XA$. $\because AX=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2z & y+2w\\ x+2z & y+2w\end{bmatrix}$

$2XA=2\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+2y & 4x+4y\\ 2z+2w & 4z+4w\end{bmatrix}\quad \therefore\begin{cases}x+2z=2x+2y\ ,\ y+2w=4x+4y\\ x+2z=2z+2w\ ,\ y+2w=4z+4w\end{cases}$

解得 $x=2w$, $y=-2w$, $z=-w$ ，於是 $X=\begin{bmatrix}2w & -2w\\ -w & w\end{bmatrix}=w\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $w\in R$. $\therefore S=\left\{k\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\middle| k\in R\right\}$