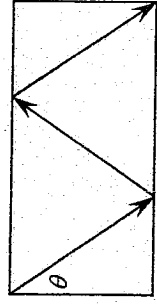


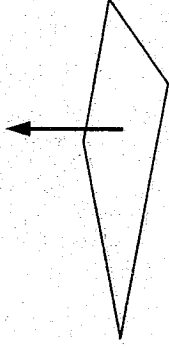
壹、填充題：共 14 題、90 分

1. 如圖所示，在一個長寬比 2:1 的矩形撞球桌上，從左上角發球，經過兩次完全彈性碰撞之後，精準的到達右下角，試問發球的射角 θ 其正弦值為多少？



2. 若 $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \frac{1}{3}$ ，試求 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ 之值

3. 如圖所示，一個邊長 10 公尺的正方形廣場，在其正中央豎立一支高 6.5 公尺的旗桿，桀諾在廣場上遊蕩，並讓自己觀測竿頂的仰角必須介於 45° 與 60° 之間，試問桀諾可行走的區域之面積是多少平方公尺？（已知桀諾的眼睛距離地面 150 公分高）



數 學

4. 已知 θ 為銳角，試求 $\log_{\sin \theta} \cos \theta + \log_{\csc \theta} \cot \theta + (\cos \theta)^{\sin \theta} \times (\sec \theta)^{\sin \theta}$ 之值

5. 設 $A[r, \theta]$ 為平面上的動點，若其極坐標的 r, θ 皆為時間 t 的函數；

$$r = f(t) = [t]$$

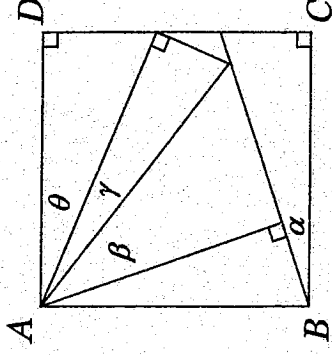
$$\theta = g(t) = 180^\circ \times t,$$

試求在 $1 \leq t < 11$ 期間， A 的軌跡長度為何？

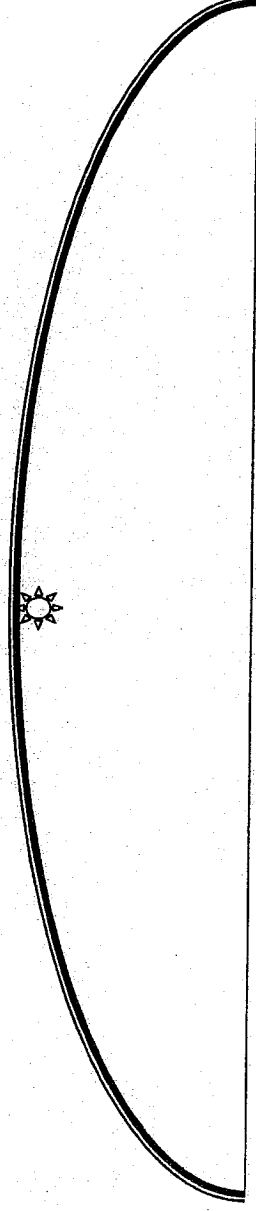
（高斯符號 $[x]$ ：小於或等於 x 的最大整數）

6. 如圖所示， $ABCD$ 為正方形，

若已知 $\cos \alpha = \frac{17}{18}$ 、 $\cos \beta = \frac{21}{25}$ 、 $\cos \gamma = \frac{24}{25}$ ，試求 $\cos \theta$



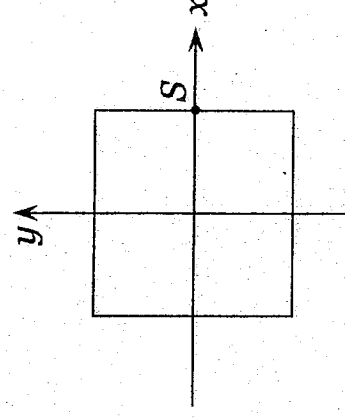
7. 在一個巨大的室內球場中，只有最高處有一盞明燈，桀諾位於球場的地板上，想要測量燈的高度；已知桀諾身高 a 公分，一開始，他先找了一個會讓影子是身高 2 倍的地方，接著他朝著明燈前進，直到影子的長度恰好等於其身高，若已知他前進了 b 公分，試問此明燈的高度是多少公分？



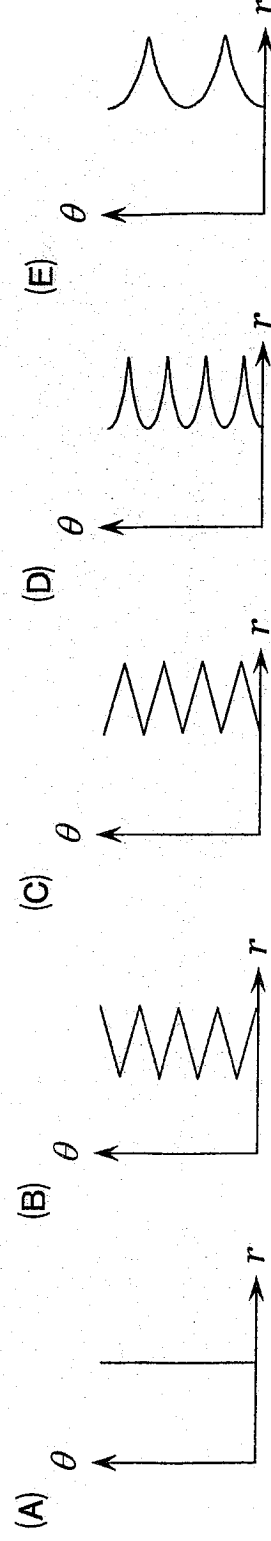
8. 如圖所示，桀諾從 S 點開始，逆時鐘繞著圖中的正方形一圈，並沿途記錄極坐標為 $[r, \theta]$

若設定 $r > 0, 0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

試問下列哪個圖形最有可能是 r, θ 的關係圖



數
學



9. 若 $\alpha + \beta = 270^\circ$ ，且 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ，試求 $\tan \beta$ (此題全對才給分)

10. $\triangle ABC$ 中，若 a, b, c 分別為 $\angle A, \angle B, \angle C$ 之對應邊，已知 $\angle C = 90^\circ, 4 \sin A + 3 \sin B = 4$ ，試求 $a:b:c$

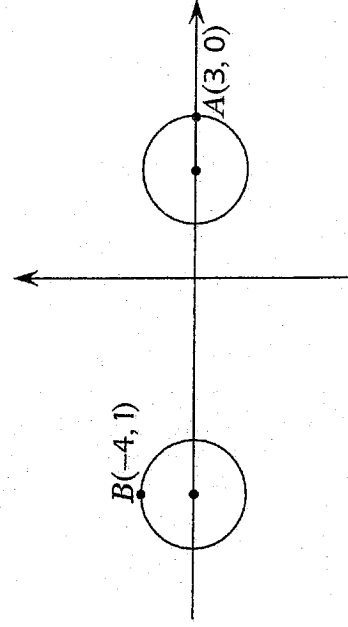
11. 集合 $S = \left\{ \theta \mid \sin \theta = \frac{2}{3}, -360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ \right\}$ ，試求所有 S 的元素之絕對值的總和

12. $\triangle ABC$ 中，若 a 、 b 、 c 分別為 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對應邊，

$$\text{且 } \begin{cases} a+b+c=18 \\ 3 \sin A = 6 \sin B = 4 \sin C \end{cases}$$

試求 $\triangle ABC$ 的內切圓面積

13. 如圖所示：坐標平面上有兩個單位圓，其圓心分別位於 $(2, 0)$ 、 $(-4, 0)$ 。今有三個質點 A 、 B 、 C ，若 A 、 B 分別同時從 $(3, 0)$ 、 $(-4, 1)$ 出發，以相同速率、逆時鐘繞行該單位圓，期間，質點 C 一直保持於 A 、 B 兩點的中點，試問當 A 、 B 相距 6 個單位的時候，質點 C 與 x 軸的距離為何？



數
學

14. 在半徑 10 的圓內做一個三角形，若其周長 28、有一個 30° 的角，試問其面積最大為何？

貳、複選題：10 分

1. 已知 $\angle A$ 為有向角，且 $(\sin A - 2)(\cos A + 2)(3 \sin A - 2)^2 \times \sin A \times (4 \sin A - 3)^3 < 0$ 試問 $\angle A$ 可能是下列哪些角度？

- (A) -45° (B) 65° (C) -65° (D) 229° (E) 108°

一年____班. 姓名:____. 座號:_____.

壹、填充題：共 14 題，90 分，配分如下

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
得分	5	10	15	20	26	33	40	47	54	61	69	77	85	90

1.	$\frac{2\sqrt{13}}{13}$	2.	$\frac{5}{9}$	3.	$\frac{50\pi}{3}$	4.	2	5.	55π
6.	$\frac{63}{68}$	7.	$a+b$	8.	(D)	9.	$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$	10.	7:24:25
11.	720°	12.	$\frac{5\pi}{3}$	13.	$\frac{1}{12}$	14.	$56(2-\sqrt{3})$		

貳、複選題：10 分，錯 1 選項 6 分、錯 2 選項 2 分，其餘 0 分

1. 全

一、是非題

平面上三點 $A(1, 2), B(2, 1), C(k^2 - 1, k - 2)$, k 為實數。試判斷下列哪些選項正確?

正確以○劃記、錯誤以×劃記之。

1. 若 $k=1$, 則恰有一個圓可通過 A, B, C 三點
2. 若 $k=2$, 則恰有一個拋物線可通過 A, B, C 三點
3. 若 $k=0$, 則恰有一個橢圓可通過 A, B, C 三點
4. 若 $k=-3$, 則存在雙曲線可通過 A, B, C 三點
5. 不論 k 為甚麼實數, 皆可找到實係數方程式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, 使其圖形可通過 A, B, C 三點

二、配合題

a, b, c 為實數, 考慮二次方程式 $a(x-1)^2 + b(y-3)^2 = c$ 在 xy 平面上所表示的圖形, 根據下列情形選出可能的圖形(以代號表示即可)。

1. $a = b$ 2. $ab = 0$ 3. $abc < 0$
- (A) 無圖形 (B) 一點 (C) 一直線 (D) 兩相交直線 (E) 兩平行直線
 (F) 圓 (G) 橢圓 (H) 拋物線 (I) 雙曲線

三、填充題

1. m 為實數, 已知 $x^2 + y^2 + (2m+4)x - (2m+6)y + 3m^2 + 2 = 0$ 的圖形為一圓, 試求此圓的最大面積。

2. 自 $P(-2, 4)$ 對圓 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ 作二切線, 切點為 A, B 。

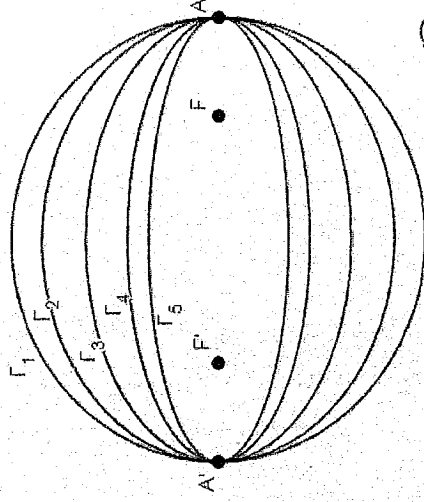
(1) 兩條切線所夾的銳角為 θ , 試求 $\tan\theta$ 之值。(2) 若 A 在第一象限, 試求直線 PA 的方程式

3. 已知一拋物線的對稱軸平行 x 軸, 且過 $(-2, 1), (2, -1), (-1, 2)$ 三點, 試求此拋物線的焦點坐標。

4. 拋物線 $x^2 = 16y$ 的焦點為 F , 點 P 在拋物線上, 且 $\overline{PF} = 13$, 試求 P 點坐標。

5. 如圖, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ 皆為以 $\overline{AA'}$ 為長軸的橢圓(依序由外至內),

試判斷哪一個橢圓最有可能是以 F, F' 為焦點?(單選)



數 學

6. 橢圓 Γ 的定義式為 $\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5} + \sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5} = 6$ ，試求 Γ 的正焦距長。
7. 已知 $\Gamma_1: 2x^2 - y^2 + 4x + 4y + 2 = 0$ 、 $\Gamma_2: 2x^2 - y^2 + 4x + 4y + k = 0$ 互為共軛雙曲線，試求 k 之值。
8. 雙曲線 $\Gamma_2: \frac{x^2}{s^2-5} + \frac{y^2}{2s} = 1$ 與橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{90} + \frac{y^2}{15} = 1$ 共焦點，若點 $P(\sqrt{118}, t)$ 在 Γ_2 上，且 $t > 0$ ，求 t 之值。
9. 已知一彗星繞太陽的軌道是以太陽為焦點的橢圓，橢圓長軸的兩頂點中，距離太陽最近的點稱為近日點，距離太陽最遠的點稱為遠日點，此彗星軌道上之近日點與遠日點和太陽的距離比是 1:49，試問此橢圓軌道之長軸長度是短軸長度的幾倍？

10. Γ 為以 $F_1(3, 5)$ 、 $F_2(-1, -3)$ 為焦點，貫軸長為 $2\sqrt{5}$ 的雙曲線。

若 Γ 的方程式為 $x^2 - 16xy - 11y^2 + ax + by + 49 = 0$ ，試求數對 (a, b)

11. 雙曲線 Γ 的兩漸近線方程式為 $3x - 4y + 5 = 0$ 、 $4x - 3y + 2 = 0$ ，且點 $(6, 7)$ 為其焦點。試求 Γ 的貫軸長。

12. 一橢圓的極坐標方程式為 $r = \frac{16}{5 + 3\cos\theta}$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$)，試求此橢圓的短軸長。

13. θ 為任意實數， $p, k > 0$ ，若 $|pk\sin\theta + 4k\cos\theta - 25|$ 恆有最大值 $7\sqrt{p^2+16}$ 、有最小值 $3\sqrt{p^2+16}$ ，試求實數數對 (p, k)

14. 有一段直水管，其橫切面為半徑 3 公分的圓。水管內塞了兩個球，球的表面剛好和水管內壁相切，且兩球面上的點之最長距離為 14 公分。今向此水管斜切一刀，使其截面恰好接觸到兩球面。在不考慮水管的厚度下，已知水管截面圖形為一橢圓，問此橢圓的長軸長為幾公分？



15. Γ 為空間中的拋物線，已知其焦點為 $F(1, 1, 1)$ ，準線為 $L: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2}$ ，

試求其正焦距兩端點的坐標。

請用藍色或黑色原子筆作答!

一、是非題:(10%)(正確以○劃記、錯誤以×劃記之)

題號	1.	2.	3.	4.	5.
答案	○	×	×	×	○

二、配合題:(15%)(每題5分。錯一個選項給3分,錯2個給1分,錯3個以上或不作答皆不給分)

題號	1.	2.	3.
答案	ABF	ACE	AFGI

三、填充題:(75%)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
分數	8	16	24	32	40	45	50	53	56	59	62	65	68	71	73	75

1.	2.(1)	2.(2)	3.
36π	$\frac{4}{3}\pi$	$2x + 11y - 40 = 0$	$(\frac{-7}{4}, 1)$
4.	5.	6.	7.
$(\pm 12, 9)$	Γ_2	$\frac{10}{3}$	-6
8.	9.	10.	11.
4	$\frac{25}{7}$	$(14, 38)$	14
12.	13.	14.	15.
8	$(3, 2)$	8公分	$(3, 2, 3)$ 和 $(-1, 0, -1)$

一、填充題：(100%)

- 設 $m \in \mathbf{R}$ 。在平面坐標系上，方程式 $x^2 + y^2 + 2(m+2)x - 2(m+1)y + 3m^2 + 10 = 0$ 所代表的圖形為一圓，試求 m 的範圍。
- 在平面坐標系上，點 $A(1, 4)$ ， $B(3, -2)$ 。若有一圓心在第一象限的圓 C 以 \overline{AB} 為弦且圓心與 \overline{AB} 距離 $\sqrt{10}$ ，試求圓 C 的方程式。
- 在平面坐標系上，試求過點 $P(8, 1)$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 相切之直線方程式。
- 在平面坐標系上，試求不等式 $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20) \leq 0$ 所代表之區域面積。
- 設 $m \in \mathbf{R}$ 。若圓 $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 10 = 0$ ，與直線 $y = m(x + 3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a < m < b$ ，試求數對 (a, b) 。
- 設 $k \in \mathbf{R}$ 。 (x, y) 之方程組 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y + k = 0 \\ 3x - 4y + 17 = 0 \end{cases}$ 恰有一組解。試求 k 之值。
- 設 $x, y \in \mathbf{R}$ 。若 $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$ ，試求 $x + 2y$ 的最大值。
- 在平面坐標系上，圓 $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ 。動點 P 滿足過 P 作圓 C 的二切線夾角 60° ，試求 P 之軌跡方程式。
- 在平面坐標系上，一拋物線之正焦弦二端點坐標為 $(4, 8)$ ， $(4, -8)$ ，試求此拋物線方程式。

10. 在平面坐標系上，一雙曲線實軸上二頂點坐標為 $(3, -6)$ ， $(3, 10)$ ，且有一漸近線斜率 $\frac{4}{3}$ ，

試求此雙曲線方程式。

11. 在平面坐標系上，試求二次曲線 $\Gamma: 4x^2 - y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$ 的焦點坐標。

12. 在平面坐標系上，試求橢圓 $\Gamma: \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} = 8$ 在第一象限的長軸頂點坐標。

13. 在平面坐標系，拋物線 $\Gamma: (x-1)^2 = 8(y+1)$ 的焦點 F ，若 Γ 在第一象限有一點 P 使 $\overline{PF} = 5$ ，試求點 P 坐標。

14. 在平面坐標系上，橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦點 F_1, F_2 ，若 Γ 在第一象限有一點 P 使 $\angle F_1PF_2$ 為直角，

試求 ΔF_1PF_2 的面積。

15. 在平面坐標系上，雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦點 F_1, F_2 ，若 Γ 上一點 P 使 ΔF_1PF_2 為等腰三角形，

試求 ΔF_1PF_2 的周長。

16. 探照燈反射鏡的縱斷面是拋物線的一部分，燈口直徑 50 公分，燈深 40 公分，試求此反射鏡之焦距。

17. 有一橢圓，其長軸長 8，短軸長 6，試求此橢圓之內接正方形的面積。

18. 在平面坐標系上，點 $B(4, 0)$ ， $C(-4, 0)$ 。若在第一象限有一點 A 使 ΔABC 周長 18，面積 $3\sqrt{15}$ ，

試求點 P 坐標。

高雄中學 108 年度第二學期 期末考 二年級 社會組

數學科

班別： 姓名：

座號：

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
得分	7	14	21	28	35	42	49	56	63	68	73	78	83	88	91	94	97	100

二、 填充題：(100%)

1	$1 < m < 5$	2	$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 20$	3	$3x - 4y = 20$ or $y = 1$	4	21π
5	$(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$	6	$k = -2$	7	$-1 + 2\sqrt{5}$	8	$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
9	$y^2 = 16x$ or $y^2 = -16(x-8)$	10	$\frac{(y-2)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{36} = 1$	11	$(-1, 2 \pm \sqrt{5})$	12	$(\frac{11}{5}, \frac{29}{10})$
13	$(1 + 2\sqrt{6}, 2)$	14	9	15	24 or 36	16	$\frac{125}{32}$
17	$\frac{576}{25}$	18	$(\frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{15}}{4})$	/			