高雄中學109第一學期第一次段考 二年級自然組 數學科 試題卷

班級______姓名________座號________

請以原子筆或鋼筆作答，答案必須完全正確，否則不予計分。

一、多選題（共 10 分，每題至少有一個選項是正確的，每題全對得 5 分，只錯一個選項可獲得 3 分，錯兩個選項可獲得 1 分，答錯多於兩個選項或未作答者，該題以零分計算。）

1. 試問下列選項中的方程式，哪些恰有兩個相異實根？

(1) $\sin x+\cos x=1$，其中 $0\le x\le\pi$

(2) $\pi\sin x=x$，其中 $-\pi\le x\le\pi$

(3) $5=\tan x$，其中 $0\le x\le 2\pi$

(4) $x^2=\sin x$，其中 $-2\pi\le x\le 2\pi$

(5) $2\cos 2x=|\cos x|+|\sin x|$，其中 $-\pi\le x\le\pi$

2. 考慮函數 $f(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x+2$，請問下列選項何者正確？

(1) $f(x)$ 是奇函數

(2) $f(x)$ 的週期是 2π

(3)若 x 為任意實數，$f(x)$ 有最小值 0

(4)在 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$，$f(x)$ 是遞增函數

(5) $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的對稱軸

二、填充題(共 75 分，依照配分表給分)

1. 比較 $\cos 1,\cos 2,\cos 3$ 之大小_____1_____。

2. 已知函數 $f(x)$ 的圖形是由函數 $g(x)=\cos x$ 經過以下步驟變換得到

I. 將 $g(x)$ 圖形上所有點的縱座標伸長為原來的 5 倍，(橫坐標不變)，得到 $k(x)$

II. 將 $k(x)$ 圖形上所有點的橫座標伸長為原來的 3 倍，(縱坐標不變)，得到 $q(x)$

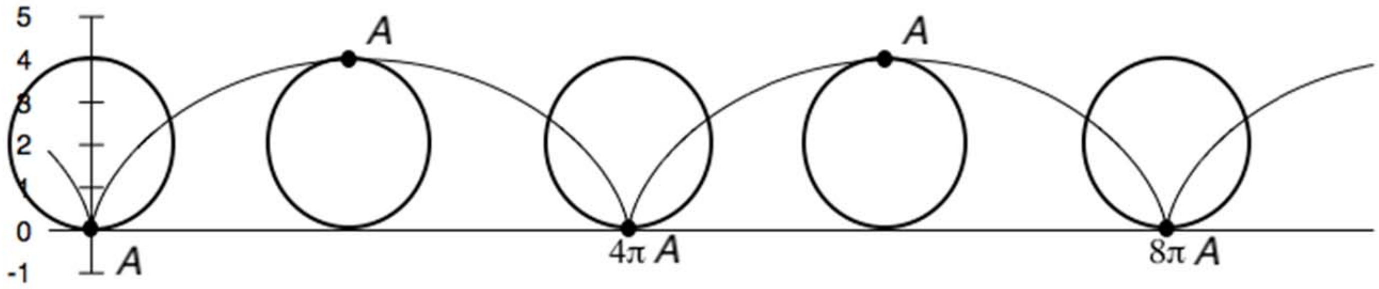
III. 將 $q(x)$ 圖形上所有點向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位長，得到 $f(x)$。

試求 $f(x)=$ _____2-1_____，$f(x)$ 的週期_____2-2_____。

3. 設 $0\le x\le\pi$，則滿足不等式 $-1\le\sqrt{3}\sin x+\cos x\le\sqrt{3}$ 之 x 的範圍為何？_____3_____。

4. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=6$ 且 $\angle A=2\angle C$，則 $\overline{AC}=$_____4_____。

5. 在數學中，擺線(Cycloid)被定義為，一個圓在一條直線上滾動時，圓邊界上**一定點**所形成的軌跡。擺線也是最速降線問題和等時降落問題的解，示意圖如下。



現有一個半徑為 2 公分的圓型硬幣，與地面垂直接觸於 A 點，現沿著地面向右滾動了 20 公分，此時 A 點離地面高 $a\cos(x)+k$ 公分，試求數對 $(a,x,k)=$_____5_____。

6. 若 $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{2}$，則 $\sin 3x+\cos 3x=$_____6_____。

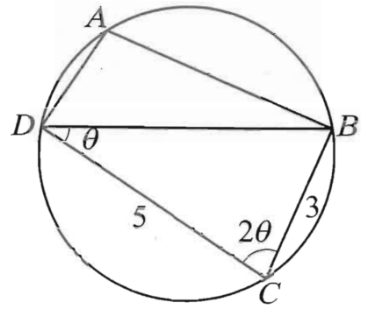
7. 已知 $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\pi$，若 $f(x)=\sin 2x-4(\sin x+\cos x)$

(1)令 $t=\sin x+\cos x$，求 t 的範圍_____7-1_____，

(2)求當 $x=m$ 時，$f(x)$ 有最小值 n，試求 $(m,n)=$_____7-2_____。

8. x 為實數，函數 $y=\dfrac{3-\sin x}{2+\cos x}$ 有最大值 M，最小值 m，試求數對 $(M,m)=$_____8_____。

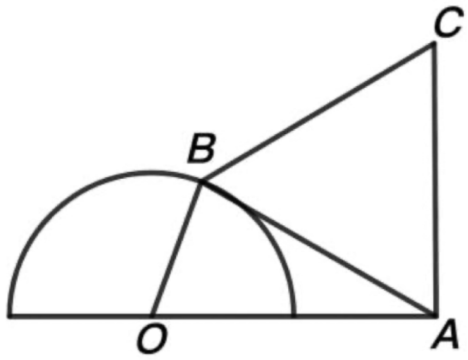
9. 如右圖(此為參考圖)，圖中 $ABCD$ 為圓內接四邊形，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\angle BCD=2\angle BDC$，試求 $\sin\angle BAD=$ _____9_____。



10. 試求 $(1+\tan 1°)(1+\tan 2°)(1+\tan 3°)...(1+\tan 42°)(1+\tan 43°)(1+\tan 44°)=$_____10_____。

11. 設 $\overline{AB}=4$，在包含 $\overline{AB}$ 之平面上滿足 $\angle APB \geq \frac{\pi}{3}$ 之動點 P 所形成區域面積為_____11_____ 。

12. 如右圖(此為參考圖)，半圓 O 的半徑為 1，A 為直徑延長線上一點，$\overline{OA}=2$，B 為半圓上任一點，以 $\overline{AB}$ 為一邊做正三角形 ABC，求四邊形 $OACB$ 面積的最大值_____12_____ 。



13. 小雄最近去博物館參觀畫展，其中有一幅巨大壁畫，壁畫上下端總長 9 公尺，其下端距離地面 4.7 公尺， 小雄眼睛距地面 1.7 公尺，則他應該站在離牆 x 公尺觀賞畫作，才可得最大的觀賞視角 θ。試求此時的 $x,\tan\theta$，並用數對 $(x,\tan\theta)$ 表示_____13_____ 。

三、計算題(15 分)

1. (1)試利用倍角公式及三倍角公式推導五倍角公式，並以 $\sin(5\theta)=a\sin^5\theta+b\sin^3\theta+c\sin\theta$ 表示。(7 分)

   (2)利用五倍角公式求出 $\sin 18°=$ ______(3 分)

2. 設 α,β,γ 為三角形 ABC 的三內角，若 $\tan\gamma=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ 且 $\sin(\beta-\alpha)=\cos\gamma$ ，求三角形 ABC 三內角的度數。(5 分)

高雄中學109第一學期第一次段考 二年級自然組 數學科 答案卷

班級______姓名________座號________

請以原子筆或鋼筆作答，答案必須完全正確，否則不予計分。

一、多選題(共10分，每題至少有一個選項是正確的，每題全對得5分，只錯一個選項可獲得3分，錯兩個選項可獲得1分，答錯多於兩個選項或未作答者，該題以零分計算。)

1	2

二、填充題(共75分,依照配分表給分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	7	14	21	27	33	39	44	49	54	59	63	67	70	73	75

1	2-1	2-2	3	4
5	6	7-1	7-2	8
9	10	11	12	13

三、計算題(15分)

1

2

高雄中學109第一學期第一次段考 二年級自然組 數學科 答案卷

班級______姓名________座號________

請以原子筆或鋼筆作答，答案必須完全正確，否則不予計分。

一、多選題(共10分，每題至少有一個選項是正確的，每題全對得5分，只錯一個選項可獲得3分，錯兩個選項可獲得1分，答錯多於兩個選項或未作答者，該題以零分計算。)

1	134	2	235

二、填充題(共75分,依照配分表給分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
得分	7	14	21	27	33	39	44	49	54	59	63	67	70	73	75

1	2-1	2-2	3	4
$\cos 1>\cos 2>\cos 3$	$f(x)=5\cos(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{9})$	6π	$0\le x\le\frac{\pi}{6}\vee\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$	5
5	6	7-1	7-2	8
$(-2,10,2)$	$\frac{-5}{4}$	$-1\le t\le\sqrt{2}$	$(\frac{\pi}{4},1-4\sqrt{2})$	$(\frac{6+2\sqrt{3}}{3},\frac{6-2\sqrt{3}}{3})$
9	10	11	12	13
$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	2^{22}	$\frac{64\pi}{9}+\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}+2$	$(6,\frac{3}{4})$

三、計算題(15分)

1.1

$\sin 5\theta$

$=\sin(3\theta+2\theta)$

$=\sin 3\theta\cos 2\theta+\cos 3\theta\sin 2\theta$ (得1分)

$=(3\sin\theta-4\sin^3\theta)(1-2\sin^2\theta)+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)(2\sin\theta\cos\theta)$ (得3分)

$=(3\sin\theta-6\sin^3\theta-4\sin^3\theta+8\sin^5\theta)+(8\sin\theta\cos^4\theta-6\sin\theta\cos^2\theta)$ (得5分)

$=3\sin\theta-10\sin^3\theta+8\sin^5\theta+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)(1-4\sin^2\theta)$

$=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta$ (得7分)

1.2

已知$\sin(5\times 18^\circ)=\sin(90^\circ)=1$,設$x=\sin 18^\circ$則可得

$1=16x^5-20x^3+5x$ (得1分)

$0=16x^5-20x^3+5x-1$

$0=(x-1)(16x^4+16x^3-4x^2-4x+1)=(x-1)(4x^2+2x-1)^2$ (得2分)

$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\Rightarrow\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (得3分)

2.

$\tan\gamma=\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$

$\Rightarrow\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma=\cos\alpha\sin\gamma+\cos\beta\sin\gamma$ (得1分)

$\Rightarrow\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma=\sin\gamma\cos\beta-\cos\gamma\sin\beta$

$\Rightarrow\sin(\alpha-\gamma)=\sin(\gamma-\beta)$

$\Rightarrow(1)\alpha-\gamma=\gamma-\beta,(2)\alpha-\gamma=\pi-(\gamma-\beta)$ (得2分)

$(1)\alpha-\gamma=\gamma-\beta\Rightarrow\alpha+\beta=2\gamma\Rightarrow\gamma=\frac{\pi}{3}$

且$\sin(\beta-\alpha)=\cos\gamma=\frac{1}{2}$

$\beta-\alpha=\frac{\pi}{6},(\frac{5\pi}{6}$不合$)$

$\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\frac{5\pi}{12}$ (得4分)

$(2)\alpha-\gamma=\pi-(\gamma-\beta)\Rightarrow\alpha-\beta=\pi$(不合) (得5分)

得三內角$\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}$