109學年度高雄中學第一學期數學科高一第二次期中考題目卷

第一部分：是非題

1. 關於下列各實數數列，哪些敘述正確？(正確填T；錯誤填F)

(1) 若數列$\langle a_n\rangle$前n項的和滿足$a_1+a_2+\cdots a_n=3n^2-5$，則$\langle a_n\rangle$為等差數列

(2) 若數列$\langle b_n\rangle$前n項的和滿足$b_1+b_2+\cdots b_n=n^2+2n$，則$\langle b_n\rangle$為等差數列

(3) 若數列$\langle c_n\rangle$滿足：$c_1=\sqrt{2}$，且對於所有正整數n，$c_{n+1}=2^n\times c_n$。

則對於所有正整數n，$c_n=2^{\frac{n^2-n+1}{2}}$

(4) 若數列$\langle d_n\rangle$滿足：$d_1=3$，且對於所有正整數n，$d_{n+1}=d_n+(3n+2)$。

則對於所有正整數n，$d_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$

(5) 若數列$\langle e_n\rangle$滿足：$e_1=3$，且對於所有正整數n，$e_{n+1}=\frac{1}{2}e_n+3$。

則對於所有正整數n，$e_n=4-\frac{1}{2^{n-1}}$

第二部分：複選題

2. 已知等比數列$\langle a_n\rangle$每一項都是實數，公比為r，滿足$a_1a_2\cdots a_9=1$，且$a_{13}=\frac{1}{16}$。試問下列選項中的敘述哪些正確？

(1) $a_3\times a_7=1$　(2) $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $a_4>1$　(4) $a_{99}>a_{100}$

(5) $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=\frac{63}{8}$

3. 大雄中銀行發行定期定額存款方案，每個月的月利率為1%，每月複利一次。有四位好友因為收入型態不同而有不同的儲蓄方式。儲蓄計畫皆於2020年1月1日開始，至2020年12月31結束後，四人皆領出本金與利息。四人儲蓄方式如下：

A. 小高自1月1日始，每個月1號皆存入1萬元。

B. 小歐自1月1日起，每個單數月份(1月、3月、5月…等等)的1號皆存入2萬元。

C. 小柯分別在1月1號、4月1號、7月1號、10月1號各存入3萬元。

D. 小希分別在3月1號、6月1號、9月1號、12月1號各存入3萬元。

則試問下列關於四人最後的本利和之大小關係哪些正確？

（1）小高＞小歐　（2）小柯＞小高　（3）小希＞小高　（4）小柯＞小希　（5）小歐＞小希

第三部分：填充題

4. 有三個實數成等比數列，其總和為84。若此三數依次加上$16, 29, 6$之後，新的三數則成等差數列，試問原本的三數為多少？(請將三數由小到大排列)

5. 已知有若干個實數值b會使得三直線：$x+3y=10$、$2x-5y=-13$、$x-by-18=0$無法圍成三角形。試求所有這樣的b值之總和為何？

6. 已知$\langle a_n \rangle$為一等差數列，令$S_n=a_1+a_2+\cdots a_n$。若$S_{10}=900$， $S_{30}=3180$，則試求$S_{20}=$？

7. 若數列$\langle a_n \rangle$滿足：$a_1=1\times 3^2$，$a_2=2\times 4^2$，$\cdots$，$a_k=k\times(k+2)^2$。試求$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{30}=$？（注意：只加偶數項）

8. 試求級數和$\dfrac{1\times 2}{1^3}+\dfrac{2\times 3}{1^3+2^3}+\dfrac{3\times 4}{1^3+2^3+3^3}+\cdots+\dfrac{10\times 11}{1^3+2^3+\cdots 10^3}=$？

9. 有一條長為48單位的繩子一條，切取其三分之二長為周長，做一正三角形，令此三角形面積為S_1；再從餘下的三分之一長的繩子中，切取三分之二長為周長，再做一正三角形，令此三角形面積為S_2。按此規則不斷切取餘下繩子的三分之二長為周長做正三角形，可得到諸多正三角形，其面積依序形成一數列$\langle S_n \rangle$。若$S_1+S_2+\cdots S_{10}=a\sqrt{b}\left(1-\dfrac{1}{c^m}\right)$，其中$a,b,c,m$皆為正整數，$b$的因數中除了$1$之外沒有完全平方數，$c$為質數，則數對$(a,b,c,m)=$？

10. 試求直線$L_1:7x+5y=13$對於直線$L_2:x+2y=1$之對稱直線為何？

11. 已知在三角形ΔABC中，$A(1,5)$，其兩條中線所在的方程式為$x+5y-8=0$與$4x-7y+13=0$，則試求$\overleftrightarrow{BC}$直線的方程式為何？

12. 某鄉鎮有三家「阿 K」便利超商，為了補貨方便，其總公司決定在該鄉鎮設置一倉儲。公司為了選出合適的倉儲位置，將該鄉鎮周遭坐標化加以定位，而三家便利超商分別位於$(6,2)$、$(0,-6)$、$(-1,1)$。由於該公司是採用先進的無人機進行空載補貨，因此所有補貨的路徑皆可以視作直線，無須因為地貌或者建築物而轉彎。若公司希望倉儲位置設在到三個便利超商的補貨距離都相同的地方，請問倉儲的最佳設置位置坐標為何？

13. 有一種特殊的觀測儀器，它會追蹤某一個物體「AMBER」。當「AMBER」與它的距離縮小時，它會亮起綠燈；反之，當「AMBER」與它的距離擴大時，它則亮起紅燈。今天這個觀測儀器被固定在$(4,10)$的位置上，「AMBER」則從$(-7,5)$的位置出發，沿直線$3x+8y=19$固定一個方向移動。在移動的過程中，觀測器一開始不斷亮著綠燈，卻在經過點A時，燈號轉變成紅燈。試問：點A坐標為何

第四部分：計算證明題

14. 平面坐標系上：若直線L_1、L_2的交點在原點，兩條直線的斜率分別為m_1、m_2，試證明：

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$

15. 請利用數學歸納法證明：對於所有的正整數n，n^4+n^2+2n必定為4的倍數。

（參考公式：$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$）