高雄中學 109 學年度第二學期第一次期中考高一數學科試題

第一部分：是非題(每題 2 分，共 10 分)

試判斷下列各不等式的解何者**正確**，正確請寫◯，錯誤請寫X。

(1) $(x+2)(x+1)(-2x^2-5x+3)>0$ 的解範圍為 $x\in(-3,-2)\cup(-1,\dfrac{1}{2})$

(2) $(x-1)^{10}(x+1)^8(x-3)^{13}(x+2)\leq 0$ 的解範圍為 $-2\leq x\leq -1 \vee 1\leq x\leq 3$

(3) $(x-3)(2x^2+9x+5)\geq 0$ 的解範圍為 $x\in[-5,\dfrac{1}{2}]\cup[3,\infty)$

(4) $(2x^2-3x-2)(1-x)(-2x^2+x-1)>0$ 的解範圍為 $x>2\vee -\dfrac{1}{2}<x<1$

(5) $(x^2-1)(x^3-1)(x^2-5x-6)\leq 0$ 的解範圍為 $x<6, x\neq \pm 1$

第二部分：多重選擇題 (每題 7 分，錯一個選項得 4 分，錯兩個選項得 1 分，錯三個選項以上不得分)

1. 兩方程式 $C: x^2+y^2=|k|$ 、 $L: y=k(x-a)$ ，其中 a 、 k 皆為實數且 $k\neq 0$ ，試就不同的 a 值討論 k 的範圍及兩方程式在坐標平面上所代表的圖形何者**正確**？

   (1) 當 $a=3$ 時，有 2 個相異的 k 值可使 C 與 L 的圖形恰交一點

   (2) 當 $a=3$ 時，若 C 與 L 的圖形無交點，則 k 滿足 $\dfrac{9-\sqrt{77}}{2}<|k|<\dfrac{9+\sqrt{77}}{2}$

   (3) 當 $a=\sqrt{2}$ 時，無論 k 值為何，C 與 L 的圖形皆有交點

   (4) 當 $a=\sqrt{2}$ 時，若 $|k|=1$，則 C 與 L 的圖形恰交一點

   (5) 無論 a 為何值，皆存在適當的 k 值使 C 與 L 的圖形恰交一點

2. 下列敘述何者正確？

   (1) 方程式 $4^x+4^{-x}=2^{|x|}+1$ 恰有 1 個實根

   (2) 方程式 $4^x+4^{-x}=2^{-|x|}+2$ 恰有 2 個實根

   (3) 方程式 $|4^x-1|=2^x$ 恰有 3 個實根

   (4) 方程式 $2^{3x+1}-3\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0$ 恰有 3 個實根

   (5) 方程式 $2^{|x|}-1=x^2$ 恰有 5 個實根

第三部分：填充題 (共 64 分，配分如表格)

1. 已知$a\in\mathbb{R}$，二次不等式$4ax^2+2a(a+1)x+a<0$，對所有實數x恆成立，

   則a之範圍為 ______。

2. 求不等式$x^2+y^2+6|x|-6|y|\le 0$在坐標平面上之圖形面積為 ______。

3. 設坐標平面上L：$mx-y-1-2m=0$，且已知$C_1:(x+2)^2+(y+2)^2=16$、$C_2:(x-4)^2+(y-4)^2=4$，若L與C_1有交點且與C_2不相交，則m之範圍為 ______。

4. 若$a^{4x}=3-2\sqrt{2}$，則$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=$______。

5. 設$x\in\mathbb{R}$且滿足方程式$\dfrac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\dfrac{7}{6}$，則$x=$______。

6. 已知坐標平面上一點$A(2,-1)$與圓$C:x^2+y^2+6x-22y+114=0$，若圓上有一動點P使$\overline{PA}$為整數，

   則滿足條件的P有______個。

7. 若$\dfrac{4^{\frac{1}{2020}}}{4^{\frac{1}{2020}}+2}+\dfrac{4^{\frac{2}{2020}}}{4^{\frac{2}{2020}}+2}+\cdots\cdots+\dfrac{4^{\frac{2019}{2020}}}{4^{\frac{2019}{2020}}+2}=\dfrac{m}{n}$，$m,n\in\mathbb{N}$且$(m,n)=1$，試求$m+n=$______。

8. 若指數方程式$3^x-2(k-1)\cdot 3^{-x}=k-3$有實數解，則實數$k$的範圍為______。

9. 坐標平面上一光線通過點$A(8,5)$，經 x 軸上一點$(a,0)$反射後與圓$(x-2)^2+(y-2)^2=5$相切，

   試求$a=$____。(注意：光的行進符合光學性質)

10. 若函數$f(x)=2(3^x+3^{-x})-3(9^x+9^{-x})+1$，則$f(x)$的最大值為______。

第四部分：計算證明題 (共 12 分，此部分請寫出詳細計算過程)

1. 已知坐標平面上一圓方程式為 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 及圓內一點 $A(x_0,y_0)$，且 A 不為圓心，若 P 為任意過 A 之弦的中點，試證明 P 點的軌跡為一圓。(6 分)

2. 設某項實驗中細菌每過一日增為 k 倍，且初始細菌數為100個，若觀測到五天後的細菌數為24300個，請問：

   (1) 實驗開始後第幾天，細菌數目會超越1000000個？(3 分)

   (2) 若研究人員於實驗開始後第 60 小時進行觀測，試問此時細菌數目約為幾個？(3 分)

   ($\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，請將答案四捨五入至整數位)

高雄中學 109 學年度第二學期第一次期中考高一數學科答案卷

一、是非題(每題 2 分，共 10 分)

1	2	3	4	5

二、多重選擇題(共 14 分) (每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，錯三個選項以上不得分)

1	2

二、填充題(共 64 分) (配分如表格)

題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	9	17	25	32	38	44	50	55	60	64

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

三、計算證明題(共 12 分)(此部分需寫出詳細計算及證明過程)

1.	2.

高雄中學 109 學年度第二學期第一次期中考高一數學科答案

一、是非題(每題 2 分，共 10 分)

1	2	3	4	5
○	X	X	○	X

二、多重選擇題(共 14 分) (每題 7 分，錯一個選項得 4 分，錯兩個選項得 1 分，錯三個選項以上不得分)

1	2
234	25

三、填充題(共 64 分) (配分如表格)

題數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
得分	9	17	25	32	38	44	50	55	60	64

1	2	3	4	5
$a<-2$	$18\pi-36$	$-\frac{15}{8}\le m<\frac{21}{20}$	$2\sqrt{2}-1$	±1
6	**7**	**8**	**9**	**10**
16	2021	$k>1$	$\frac{11}{2}$	-1

三、計算證明題(共 12 分)(此部分需寫出詳細計算及證明過程)

1.

設圓心$O(h,k)$，$P(x,y)$，則$\angle APO=90^\circ$， **(1 分)**

故由畢氏定理，$\overline{OA}^2=\overline{AP}^2+\overline{OP}^2$，即

$(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(x-h)^2+(y-k)^2$ ， **(3 分)**

整理後得 $x^2+y^2-(x_0+h)x-(y_0+k)y+(hx_0+ky_0)=0$ **(4 分)**

又$(-(x_0+h))^2+(-(y_0+k))^2-4(hx_0+ky_0)=(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=\overline{OA}^2>0$，

故P之軌跡方程式為圓方程式。 **(6 分)**

(若學生由其他方式證明P之軌跡為一圓，請閱卷老師自行斟酌給分)

2.

(1)由題意可知 1 天後細菌增為 3 倍。

設n天後超過1000000，則$3^n\cdot100\ge1000000$，

可知$n\ge9$。

(2)60 小時為$\frac{5}{2}$天，故細菌數為

$3^{\frac{5}{2}}\cdot100=9\sqrt{3}\cdot100\approx1558.8$

四捨五入至整數位得1559 個。