高雄中學 109 學年度第二學期高三第二、三類組數學科第一次月考試題

範圍：第三章(全)

(請將答案寫在答案卷上，請小心計算，Good Luck!!)

一、 多選題:(每題 5 分共計 10 分)

說明：每題有 5 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項。選出正確選項，畫記在答案卷之「答案欄」。各題之選項獨立判定，每個選項答對者，得 1 分，答錯 1 個選項者，得 0 分，所有選項均未作答該題以 0 分計算。

1. 設 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n，$a_n < b_n^2 < a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 9$，試選出正確的選項？

(1)對所有的正整數 n，$a_n > 8$ 均成立 (2)存在正整數 n，使得 $a_{n+1} > 9$ (3)對所有的正整數 n，$b_n^2 < b_{n+1}^2$ 均成立
(4) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 = 9$ (5) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -3$

2. 設 $f(x)$ 為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限 $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{|x|}{x}\right)$ 存在，試選出正確的選項？

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{|x|}\right)^4$ 存在 (2) $\lim\limits_{x\to0} f(x)\frac{x}{|x|}$ 存在 (3) $\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)+2021\right)\frac{x}{|x|}$ 存在 (4) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 存在 (5) $\lim\limits_{x\to0} f(x)^{2020}$ 存在

二、 填充題:(共計 75 分)

3. 無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(2x-5)^n$ 收斂至 $-\frac{3}{4}$，求 $x=$ ___(A)___

4. 若 $f(x)$ 為 x 的三次多項式，且滿足 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=1$，$\lim\limits_{x\to4}\frac{f(x)}{x-4}=1$，求 $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=$ ___(B)___

5. 若 a,b 為實數且已知 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-1}=\frac{1}{6}$，試求數對 $(a,b)=$ ___(C)___

6. 設 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b)=0$，求數對 $(a,b)=$ ___(D)___

7. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^3}{n^4+1^3}+\frac{2^3}{n^4+2^3}+\cdots+\frac{n^3}{n^4+n^3}\right)=$ ___(E)___

8. 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})(1-\sqrt[5]{x})(1-\sqrt[6]{x})}{(1-x)^5}=$ ___(F)___

9. 已知不等式 $(x^2+y^2-3)(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-\frac{1}{3})\cdots(x^2+y^2-\frac{1}{3^{n-2}})\le 0$，$n$ 為自然數，在座標平面上此不等式所表圖形面積為 S_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=$ ___(G)___

10. 已知座標平面上有隻螞蟻一開始在原點，隨後先向正東方移動1單位距離，然後左轉彎移動 $\frac{2}{3}$ 單位距離，如此不斷重複左轉彎，使得後一段移動距離為前一段的 $\frac{2}{3}$ 倍，試求該螞蟻的極限位置與原點相距 ___(H)___ 單位距離

11. 設 $a,b\in R$，若函數 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 在整個實數上為連續函數，試求數對 $(a,b)=$______(I)______

12. 求無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}}=$______(J)______

13. 已知 $n\in N$，當 $\dfrac{1}{2^n}<x\le\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 時，函數 $f(x)=a_n(\log_{\frac{1}{2}}x)^n$ 且 $a_1=1$，若 $f(x)$ 為區間 $(0,1]$ 上連續函數，求 $a_n=$______(K)______

14. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 S_n 且 $a_1=1$，$3{S_n}^2=a_n(3S_n-1)$, $\forall n\ge 2$，試求無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{3n+1}=$______(L)______

三、計算證明題:(第一題 7 分，第二題 8 分共計 15 分)

1. 設一骰子連續投擲 n 次出現的點數依序為 x_1、x_2、⋯、x_n，令 $X_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，X_n 為的 7 的倍數之機率為 P_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$？

2. 設 a,b,c 是閉區間 $[0,1]$ 上的三個實數，且 $f(x)=\dfrac{|x-a|+|x-b|+|x-c|}{3}$，試證明可以在閉區間 $[0,1]$ 上找到實數 x_0 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

高雄中學 109 學年度第二學期高三第二、三類組數學科第一次月考答案

_______年_______組　　姓名:_______________　　座號:______

一、多選題:（10%）

1.	(3)(4)	2.	(1)(2)(5)

二、填充題:（75%）

1 格	2 格	3 格	4 格	5 格	6 格	**7 格**	8 格	9 格	10 格	11 格	12 格
10 分	20 分	30 分	38 分	46 分	54 分	**60 分**	63 分	66 分	69 分	72 分	75 分

(A) $\frac{9}{4}$	(B) $-\frac{1}{2}$	(C) $(8,3)$	(D) $(-1,0)$	(E) $\frac{1}{4}$
(F) $\frac{1}{720}$	(G) $\frac{9\pi}{4}$	(H) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$	(I) $(1,0)$	(J) $\frac{17}{10}$
(K) $\frac{1}{(n-1)!}$	(L) $\frac{1}{3}$			

三、計算證明題:（15%）

1.（7%）

Sol:依題意可知 $P_{n+1}=\frac{1}{6}(1-P_n)$，$\forall n\in N$.

因為 $P_{n+1}-\frac{1}{7}=-\frac{1}{6}(P_n-\frac{1}{7})$，$\forall n\in N$.

所以 $P_n-\frac{1}{7}=(-\frac{1}{6})^{n-1}(P_1-\frac{1}{7})$，$\forall n\in N$.

又因為 $P_1=0$, 故得 $P_n=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}(-\frac{1}{6})^{n-1}$，$\forall n\in N$.

所以 $\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}-\frac{1}{7}(-\frac{1}{6})^{n-1}=\frac{1}{7}$.

2.（8%）

Pf:因為 $f(x)=\frac{|x-a|+|x-b|+|x-c|}{3}$ 為連續函數，且

$f(0)=\frac{a+b+c}{3}$，$f(1)=1-\frac{a+b+c}{3}$

若 $a+b+c\le\frac{3}{2}$，則 $f(0)=\frac{a+b+c}{3}\le\frac{1}{2}$，$f(1)=1-\frac{a+b+c}{3}\ge\frac{1}{2}$

若 $a+b+c>\frac{3}{2}$，則 $f(0)=\frac{a+b+c}{3}>\frac{1}{2}$，$f(1)=1-\frac{a+b+c}{3}<\frac{1}{2}$

根據中間值定理必存在實數 $x_0\in[0,1]$ 使得

$f(x_0)=\frac{1}{2}$.