高雄中學 110 學年度第一學期 期末考 二年級自然組數學科試題

※將各題的答案寫在答案卷上對應題號的空格內。

一、單一選擇題：第1題至第3題，每題只有一個正確的選項。

1. 空間中，平面 E 上有一個$\triangle ABC$,其面積為 m，若平面 E 與平面 F 的銳夾角為 60°,則

$\triangle ABC$在平面 F 上的投影面積＝ (1)$\frac{1}{2}m$ (2)$\frac{\sqrt{3}}{2}m$ (3)$(\frac{1}{2})^2 m$ (4)$(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 m$ (5)$(\frac{1}{2}m)^2$

2. 展開並因式分解：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$=(a-b)(b-c)(c-a),則 k=

(1)1 (2)a+b+c (3)ab+bc+ca (4)$a^2+b^2+c^2$ (5)abc

3. 設 a、b 為正實數常數,空間中有一個四面體 ABCD,$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=\frac{a+b}{2}$,$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$,$\overline{BC}$=a,$\overline{CA}$=b,

則 D 點到平面 ABC 的距離=

(1)$\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ (2)$\sqrt{\frac{ab}{2}}$ (3)$\frac{\sqrt{a+b}}{2}$ (4)$\frac{\sqrt{ab}}{2}$ (5)$\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{2}$

二、多重選擇題：第4題至第6題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項。

4. 空間中有一正四面體ABCD, 已知其中三頂點分別為$A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$C(0,0,\sqrt{3})$,而D點在第一卦限內，則下列各選項何者正確？

(1)D的坐標為$(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$ (2) 此正四面體的高＝2 (3) 此正四面體之內切球的體積＝$\frac{1}{6}\pi$

(4) 設P,Q,R三點滿足$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$,$2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{QC}$,$3\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{RD}$,G為$\triangle BCD$的重心，若$\overline{AG}$與平面PQR交於點S，則$\overline{AS}$的長＝1

(5) 承(4), 四面體APQR的體積＝$\frac{\sqrt{3}}{6}$

5. 在空間中，下列各選項是獨立互不相關，選出恆正確的選項：

(1) 若直線L與平面E恰交於一點，且L與E不垂直，則恰有一平面F包含L且垂直平面E

(2) 設相異兩點B,C與一直線L皆在一平面E上，E外有點A，若線段$\overline{AB}$與$\overline{BC}$皆垂直L於B點，則$\overline{AC}$與E垂直

(3) 有相異四點A,B,C,D, 若直線AB與直線CD互為歪斜線, 則直線AC與直線BD必不相交

(4) 平行六面體ABCD-EFGH的12條稜線中，互為歪斜線的稜線有24對

(5) 有不共線的五點O,P,A,B,C滿足$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$(其中x,y,z為實數)，若P,A,B,C四點共面,則x+y+z=1

6. 空間中三個非零向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$,設$\vec{0}=(0,0,0)$,

下列各選項是獨立互不相關，選出恆正確的選項：

(1) 若$\vec{a}\perp\vec{b}$且$\vec{b}\perp\vec{c}$，則$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$

(2)$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

(3)$\vec{c}\bullet(\vec{a}\times\vec{b})=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(4) 若$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\bullet\vec{b}|$，則「$\vec{b}$在$\vec{a}$上的正射影長」小於「$\vec{b}$長度的一半」

(5) 若$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{0}$，則必存在兩實數p,q, 使得$\vec{a}=p\vec{b}+q\vec{c}$

三、填充題：第7題至第17題為填充題。

7. 空間直角坐標中三點A(2,-3,4),B(4,-5,4),C(2,-2,3), 求$\triangle ABC$的面積＝__________。

8. 空間直角坐標中，設點P在第一卦限內，P到x軸、y軸的距離各為$3\sqrt{5}$、$2\sqrt{10}$，P到xy平面距離為2，求P與原點的距離＝＝__________。

9. 設x,y,z是實數，已知$x^2+4y^2+9z^2=56$,求2x+2y+9z的最大值＝__________。

10. 若$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$=1, 求值：$\begin{vmatrix} 3a_1+b_1 & a_1-2c_1 & a_1+b_1+c_1 \\ 3a_2+b_2 & a_2-2c_2 & a_2+b_2+c_2 \\ 3a_3+b_3 & a_3-2c_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix}$=__________。

11. 空間中，設三線段$\overline{OA},\overline{OB},\overline{OC}$兩兩互相垂直，若$\overline{OA}=2,\overline{OB}=4,\overline{OC}=6$,則$\triangle ABC$的面積＝__________。

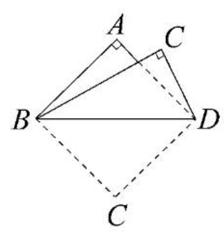
12. 空間直角坐標中有相異四點A(1,0,3),B(0,1,t),C(0,k,k+1),D(1,k-3,k) (其中t、k為定實數) ，若A,B,C,D四點共平面，求值：t＝__________。

13. 在空間直角坐標中，xz平面為一面鏡子。有一光線通過點A(4,2,2), 射向鏡面上的點B(2,0,4), 反射後通過C點。若$3\overline{AB}=2\overline{CB}$，則A與C的距離(即$\overline{AC}$)＝__________。

14. 將一塊邊長 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$公分、$\overline{BC}=\sqrt{6}$公分的長方形鐵片ABCD沿對角線$\overline{BD}$對摺後豎立，

使得平面ABD與平面CBD垂直，則A,C兩點(在空間)的距離(即$\overline{AC}$)=__________公分。

15. 參考右圖，空間中，將一張正方形的紙ABCD沿著對角線$\overline{BD}$摺起使得銳角$\angle ABC=\alpha$，此時二平面ABD與BCD的銳夾角為β,已知$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$,求值：$\cos\beta$=__________。



16. 在空間中，三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$滿足$(\vec{a}\times\vec{c})\bullet(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})\bullet(5\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c})$=21, 求由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$所張出的平行六面體的體積＝__________。

17. α,β,γ為定實數，在空間直角坐標中，$\triangle ABC$的三頂點為$A(7,2,\alpha)$ $B(\beta,8,-1)$ $C(1,2,5)$。

對於空間中任意動點 P, 另有一定點$Q(3,\gamma,1)$滿足$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\geq\overline{QA}^2+\overline{QB}^2+\overline{QC}^2$。

若 D 點在第一卦限內，與 A、B、C 形成一個正四面體 ABCD，求正四面體 ABCD 的外接球球心的坐標為__________。

四、計算題：第18題計算題。

18.(1) 空間中有四個非零向量：$\vec{a}$=(23,18,39),$\vec{b}$=(37,29,64),$\vec{c}$=(30,25,53),$\vec{n}$=(x,y,z),

已知$\vec{a}\bullet\vec{n}=\vec{b}\bullet\vec{n}=\vec{c}\bullet\vec{n}$，求值：$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$=?

(2) 承(1), 求由$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$所張成的四面體體積＝？

高雄中學 110 學年度第一學期 期末考 二年級自然組數學科試題 **答案卷**

班級：二年______組　　座號：______　　姓名：______________

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
得分	8	16	24	32	40	48	56	60	64	68	72	76	80	84	86	88	90

1	2	3	4	5	6
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**	**17**	

※第 18 題計算題，將過程詳細寫在下面。(共佔 10 分)

高雄中學 110 學年度第一學期 期末考 二年級自然組數學科試題 **參考答案**

班級：二年______組　　座號：______　　姓名：______________

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
得分	8	16	24	32	40	48	56	60	64	68	72	76	80	84	86	88	90

1	2	3	4	5	6
1	5	2	123	134	2
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$\sqrt{3}$	7	28	3	14	2
13	**14**	**15**	**16**	**17**	
$\sqrt{51}$	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{3}$	7	$(4,5,2)$	

※第 18 題計算題，將過程詳細寫在下面。（共佔 10 分）

答：(1) $-\frac{1}{3}$　　(2) 7