

數學科

班別：

姓名：

座號：

【註】符號 $P(A)$ 表示事件 A 發生的機率； $E(X)$ ， $Var(X)$ 分別表示隨機變數 X 之期望值與變異數

一、多選題：(28%)

(每題全對給 7 分，錯一選項給 5 分，錯二選項給 3 分，錯三或以上選項不給分)

1. 設 X 為離散型隨機變數， X 的機率分布表如右：

試問下列哪些選項是正確的？

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0.1	0.2	a	0.1	0.2

(A) $a = 0.3$

(B) $P(X \geq 0) = 0.7$

(C) $E(X) = 0$

(D) $E(X^2) = 1.5$

(E) $Var(X) = 1.5$

2. 一袋子中有 3 個紅球，7 個白球。現從袋中每次取出一球，每一球被取到的機會均等，連取 3 次。

若每次取球後將球放回袋中，

隨機變數 X_1, X_2, X_3 分別表示第一次，第二次和第三次取到紅球的個數，

隨機變數 X 表示三次取到紅球的總個數；

若每次取球後不將球放回袋中，

隨機變數 Y_1, Y_2, Y_3 分別表示第一次，第二次和第三次取到紅球的個數，

隨機變數 Y 表示三次取到紅球的總個數。

若 $E(X_1) = p$ ， $Var(X_1) = q$ ，試問下列哪些選項是正確的？

(A) $E(Y_3) = p$

(B) $Var(Y_3) = q$

(C) $E(X) = E(Y) = 3 \times p$

(D) $Var(X) = Var(Y) = 3 \times q$

(E) $p + q = \frac{51}{100}$

3. 小雄到靶場作射擊練習，根據過往經驗知，他命中靶紙的機率為 $\frac{1}{3}$ ，設每次射擊命中與否均獨立，若隨機變數 X 表持續射擊至命中第一發所需射擊的次數，試問下列敘述哪些是正確的？
- (A) 若當次練習，小雄想讓至少一發命中靶紙的機率超過0.99，則小雄至少應準備3發子彈
- (B) 設隨機變數 X 的機率質量函數 $f(x)$ ，則當 $x = 3$ 時， $f(x)$ 有最大值
- (C) $P(X \leq 3) \geq P(X \geq 3)$
- (D) 隨機變數 X 的期望值為 3
- (E) 隨機變數 X 的標準差為 6

4. 投擲一公正骰子125次。設隨機變數 X 表點數6出現的次數，其機率質量函數 $f(x)$ ， $x = 0, 1, \dots, 125$ ，試問下列敘述哪些是正確的？
- (A) 當 $x = 21$ 時， $f(x)$ 有最大值
- (B) $f(20) = f(21)$
- (C) $f(12) < f(18)$
- (D) 隨機變數 X 的期望值為 21
- (E) 隨機變數 X 的標準差為 $\frac{25}{6}$

二、填充題：(64%；每格 8 分)

1. 設 m 為正整數，一離散型隨機變數 X 的機率質量函數 $f(k) = \frac{C_2^k}{m}$ ， $k = 2, 3, 4, \dots, 19, 20$ ，試求
- (1) m 之值
- (2) 隨機變數 X 的期望值 $E(X)$
2. 阿雄上學時須經過三個路口，在此三個路口遇到紅燈的機率分別為0.4，0.5，0.6。設此三個路口紅燈號誌均互相獨立，試問阿雄上學遇到紅燈個數的期望值。

3. 一袋子中有編號01至20的20個球。現從中隨機抽取3球，隨機變數 X 表所取球的最大號碼，隨機變數 Y 表所取球的最小號碼，試求 $E(X) + E(Y)$ 之值。

4. 袋中有紅球、白球若干個，欲檢定袋中的紅球數量是否占全部的 $\frac{1}{5}$ 以下，擬採取連續抽球 10 次，每次取後放回，紀錄 10 次中抽出紅球的總次數，當次數過多則拒絕該假設。若隨機變數 X 代表 10 次中抽到紅球的總次數，並且將顯著水準訂為 0.05。根據右圖提供的 $X \sim B(10, \frac{1}{5})$ 之機率分布表，拒絕域應訂為何？

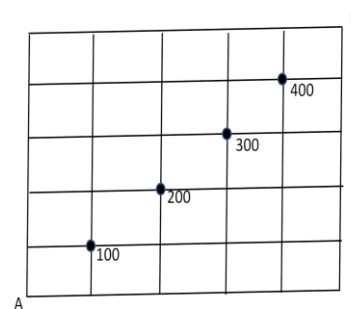
k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
0	0.107374182	0.107374182
1	0.268435456	0.375809638
2	0.301989888	0.677799526
3	0.201326592	0.879126118
4	0.088080384	0.967206502
5	0.026424115	0.993630618
6	0.005505024	0.999135642
7	0.000786432	0.999922074
8	0.000073728	0.999995802
9	0.000004096	0.999999898
10	0.000000102	1

5. 持續投擲一公正硬幣。隨機變數 X 表投擲至有出現正面，亦有出現反面為止所投擲的次數。試求 X 之期望值。

6. 試求級數 $\sum_{k=0}^{36} k^2 C_k^{36} (\frac{1}{6})^k (\frac{5}{6})^{36-k}$ 之值。

7. 有一抽獎遊戲，莊家製作如右圖中所有 A 至 B 的捷徑的籤各一張。

遊戲規則：若抽到的籤所對應的路徑通過圖中標示獎金的點，就可得所標示的獎金。例如，抽到的籤所對應的路徑恰通過圖中標示獎金100和400的點，就可得獎金500元。現隨機抽取一張籤，隨機變數 X 表所得之獎金，試求 X 之期望值。



三、證明題：(8%)

1. 設 X 為一離散型隨機變數，其機率質量函數 $f(k)$ ， $k = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$ 。

試證明： $Var(X) = E(X^2) - \mu^2$ ，其中 $\mu = E(X)$ 。

數學科

班別：

姓名：

座號：

一、多選題：(28%)

(每題全對給 7 分，錯一選項給 5 分，錯二選項給 3 分，錯三或以上選項不給分)

1	BD	2	ABCE	3	CD	4	ABCE
---	----	---	------	---	----	---	------

二、填充題：(64%：每格 8 分)

1(1)	1330	1(2)	$\frac{31}{2}$	2	1.5	3	21
4	{5,6,7,8,9,10}	5	3	6	41	7	$\frac{32500}{63}$

三、證明題：(8%)

1 略

數學科

班別：

姓名：

座號：

一、 多選題：(28%)

(每題全對給 7 分，錯一選項給 5 分，錯二選項給 3 分，錯三或以上選項不給分)

1	2	3	4
---	---	---	---

二、 填充題：(64%：每格 8 分)

1(1)	1(2)	2	3
4	5	6	7

三、 證明題：(8%)

1
