高 雄 中 學 一 一 〇 學 年 度 第 一 學 期 第 一 次 段 考 數 學 科 一 年 級 試 卷

一年____班 ____號　姓名______________

※ 答案請寫在答案卷上，作答用藍色或黑色原子筆，不可使用鉛筆作答

※ 本試卷所有題目都只在實數範圍內討論

一、多重選擇題(每題至少有一個選項可選)

1. P, Q 為二敘述。已知命題 $P \to Q$ 為假，試問下列哪些複合敘述為真？

(A) $(\sim P) \vee Q$　(B) $P \wedge Q$　(C) $(\sim Q) \to P$　(D) $Q \to (P \to Q)$　(E) $(Q \to P) \to Q$

2. a，b 為實數，試問下列哪些選項正確？

(A) $a = b = 0$ 是 $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = 0$ 的必要非充分條件

(B) 若 a，b 為有理數，且 $a < b$，則存在有理數 c，使得 $a < c < b$

(C) 若 ab，$a + b$ 皆為有理數，則 $a - b$ 為有理數

(D) 若 a^3b^5，a^4b^2 皆為有理數，則 a，b 都是有理數

(E) 若 $a + b - c$，$b + c - a$，$c + a - b$ 都是有理數，則 a，b，c 也都是有理數

二、填充題

1. 這次數學小考，共考了三題。全班 50 位同學，至少都答對一題。其中答對第一題的人有 35 位，答對第二題的有 30 人，有 43 人第一題和第二題至少對一題、有 45 人是第二題和第三題至少對一題，且有 12 人第二題和第三題都答對，18 人第一題和第三題都答對，求三題均答對的共有多少人？

2. (1) 已知 $\sqrt{7+\sqrt{13-4\sqrt{9-4\sqrt{5}}}}$ 可以用連分數 $3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}$ 估算其值，

試<u>化簡</u>此連分數(以假分數表示)；

(2) 令 $\sqrt{7+\sqrt{13-4\sqrt{9-4\sqrt{5}}}} = 3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{x}}}}$，求 x 之值。

3. 解絕對值方程式 $|x-6|-3|x+2|=0$

4. a, b 為實數，若 $3 \le |ax-1| \le b$ 的解為 $-2 \le x \le -1$ 或 $2 \le x \le 3$，試解不等式 $|ax-b| \ge 3$

5. 將 $\frac{123}{999}+\frac{122}{990}+\frac{111}{900}$ 展開之後，以小數表示，試求小數點後第 110 位數字。

6. 解絕對值不等式 $3 < |x-1|+2|x-2|+2|x-3| < 6$

7. 令兩集合 $A=\{x-1, y-2\}$，$B=\{x+y, 2x+3\}$，若 $A-B=\varnothing$ 且 $B-A=\varnothing$，求集合 B。
(請注意集合的書寫格式)

8. a,b 為有理數，若 $\dfrac{16a+4b}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+(a-3b+1)(\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+2)=(3b+5)\sqrt{2}$，試求數對$(a, b)$。

9. $[x]$表不大於 x 的最大整數，試求$\left[\left(\dfrac{4+\sqrt{17}}{3}\right)^3\right]$之值。

10. $a, b>0$，已知$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=3$，試求$(\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3})^2$之值。

11. 試求方程式 $2x^2-4=\sqrt{(3x^2-2x-12)(x^2+2x+4)}$ 的實根。

12. 因式分解 $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$

三、計算證明題：

1. 已知$\sqrt[3]{2}$是無理數，試證$\sqrt{2+\sqrt[3]{2}}$亦是無理數。

2. 勘誤題： a,b 為正數，要求$(a+\dfrac{1}{4b})(\dfrac{9}{a}+b)$之最小值。

步驟一：由算幾不等式，$\dfrac{a+\frac{1}{4b}}{2}\geq\sqrt{\dfrac{a}{4b}}$，得 $a+\dfrac{1}{4b}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{4b}}$

步驟二：由算幾不等式，$\dfrac{\frac{9}{a}+b}{2}\geq\sqrt{\dfrac{9b}{a}}$，得$\dfrac{9}{a}+b\geq 2\sqrt{\dfrac{9b}{a}}$

步驟三：兩式相乘，得$(a+\dfrac{1}{4b})(\dfrac{9}{a}+b)\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{4b}}\times 2\sqrt{\dfrac{9b}{a}}=6$

所以求得最小值為 6。

試判斷此做法是否正確並回答。如有錯誤，請寫出原因，並利用算幾不等式來找出正確的最小值。若無錯誤，請於答案卷上直接寫"做法正確"即可。

高 雄 中 學 一 一 〇 學 年 度 第 一 學 期 第 一 次 段 考 數 學 科 答 案 卷

一年____班 ____號　姓名____________

一、多重選擇題：10%(每題至少有一個選項可選，每個選項獨立計分)

1.	2.
(C)(D)	(B)(E)

總分：______________

二、填充題：78%(請按照題號作答，填錯格子不給分，各格答案須全對才計分)

計分標準：

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
分數	8	16	24	32	40	46	52	57	62	66	70	74	78

1.	2.(1)	2.(2)(課本習題)	3.	4.
10	$\frac{987}{305}$	$x = \sqrt{5} + 2$	$x = 0, -6$	$x \le 1$ 或 $x \ge 4$
5.	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**
7	$1 < x < \frac{17}{5}$，但 $x \ne 2$	$\{-4, -3\}$	$(1, 3)$	19
10. (課本習題)	**11.**	**12.**		
$\frac{5}{4}$	$x = -2$ 或 4	$(x+y+z)(xy+yz+zx)$		

三、證明題：12%

1. 設 $\sqrt{2+\sqrt[3]{2}} = \frac{n}{m} \in Q$，其中m, n∈ N且(m, n) = 1

則 $\sqrt[3]{2} = \frac{n^2}{m^2} - 2 = \frac{n^2 - 2m^2}{m^2} \in Q$ 與 $\sqrt[3]{2} \notin Q$ 矛盾 $\therefore \sqrt{2+\sqrt[3]{2}} \notin Q$　**(4%)**

2. 做法是否正確？ __否__ **(1%)**

(2)此做法於等號成立時，要求 $ab = \frac{1}{4}$ 且 $ab = 9$　**(2%)**

(3) $(a + \frac{1}{4b})(\frac{9}{a} + b) = 9 + \frac{1}{4} + ab + \frac{9}{4ab}$

$\ge 9 + \frac{1}{4} + 2\sqrt{ab \times \frac{9}{4ab}} = \frac{49}{4}$，　**(5%)**

等號成立時，$ab = \frac{9}{4ab} \Rightarrow ab = \frac{3}{2}$