高雄市立高雄高級中學 110 學年度第一學期高二自然組第一次期中考數學試題

一、　多重選擇題(每題 6 分，共 18 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，三個以上得 0 分)

1. 設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，若 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，則下列哪些選項正確？

(A). $\sin 2\theta=\dfrac{3}{4}$

(B). $\cos 2\theta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

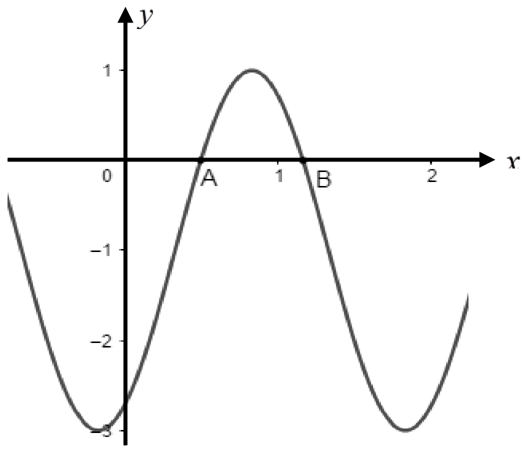
(C). $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(D). $\tan\dfrac{\theta}{2}=-2+\sqrt{7}$

(E). $\cos(\theta-\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\sqrt{7}+1}{4}$

2. 右圖為函數 $y=a\sin(bx+c)+d$ 的部分圖形，其中 $b>0,-\dfrac{\pi}{2}\le c\le\dfrac{\pi}{2}$，$A=(\dfrac{1}{2},0)$，$B=(\dfrac{7}{6},0)$，

則下列哪些選項正確？



(A). $a=2$

(B). $y=a\sin(bx+c)+d$ 的週期為 2

(C). $c=\dfrac{\pi}{3}$

(D). 此函數圖形對稱於直線 $x=\dfrac{23}{6}$

(E). 將函數 $y=a\sin bx+d$ 水平右移 $\dfrac{\pi}{3}$ 單位可得 $y=a\sin(bx+c)+d$

3. 關於下列函數周期的判斷，哪些選項正確？

(A). $f(x)=\sin(-2x+5)-1$ 的週期為 π

(B). $f(x)=(2\sin x+\cos x)(\sin x-2\cos x)$ 的週期為 π

(C). $f(x)=|\tan x+\cot x|$ 的週期為 π

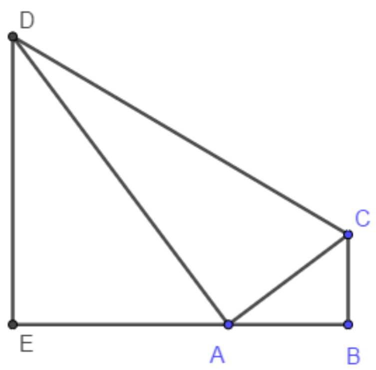
(D). $f(x)=\sin^3 x-\dfrac{3}{4}\sin x$ 的週期為 2π

(E). $f(x)=\tan^2 x+100\tan x+5\pi$ 的週期為 π

二、填充題

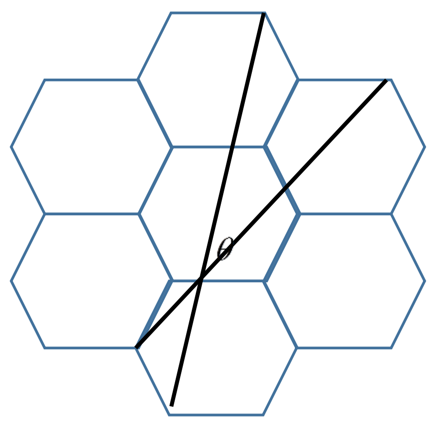
1. 如右圖，已知 $\angle ABC=\angle CAD=\angle AED=90^\circ$，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AD}=12$，

試求 $\sin\angle CDE=?$



2. 將 $y=r\cos x$ 的圖形水平右平移 h 單位，得 $y=2\sqrt{3}\cos x+6\sin x$，其中 $0\le h\le 2\pi$，$r>0$，求數對 $(r,h)=?$

3. 設 $a=\dfrac{\pi}{2}-1$，$b=\cos 1$，$c=\cos 2$，$d=\cos 100\pi$，則 a,b,c,d 由大而小的關係依序為何？

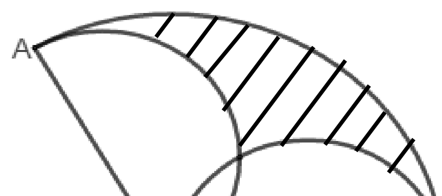


4. 右圖為 7 個鑲嵌的全等正六邊形，試求 $\tan\theta$ 之值

5. 設 $0<x<\pi$，求所有滿足方程式 $4\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x=4$ 之解 x

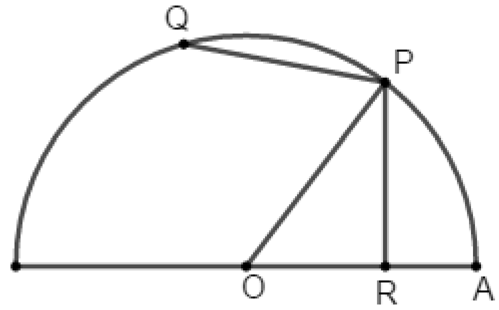
6. 設 $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$，若 $\cos 2x=\dfrac{-7}{25}$，求 $\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}$ 之值

7. 如右圖，扇形 AOB 中，已知半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}=4$，$\angle BOA=120^\circ$，若以 $\overline{OA},\overline{OB}$ 為直徑



做半圓，試求斜線部分面　積為多少

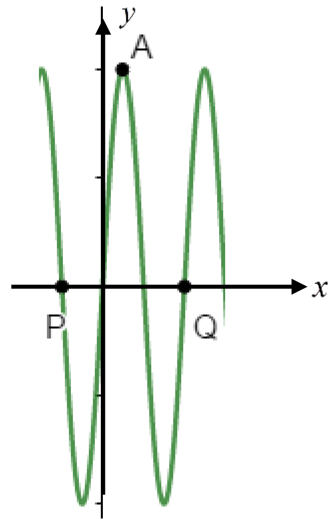
8. 如右圖，設半圓圓心為O，半徑$\overline{OA}=1$，若P,Q為半圓上的點滿足$\angle QOP=\angle POA$且P作直線OA垂線的垂足為R，試求$\overline{OR}+\overline{PQ}$的最大值



9. 設$0<x<2\pi$，$0<k<1$，則滿足$\sin 6x=k$的所有實根總和為何？

10. 有關函數$f(x)=2\sin 4\pi x$的部分圖形如右，已知A為圖形的最高點，P,Q為圖形與x軸的交點，若ΔAPQ的面積為α，方程式$2\sin 4\pi x=\dfrac{2}{3}x$實根個數為$\beta$

試求數對$(\alpha,\beta)=?$



11. 右圖為以O為圓心的兩同心圓，其半徑分別為$1,2$且A,B分別落在兩圓上，若A點座標為(a,b)且$\angle AOB=120^\circ$，則B點座標為下列哪個選項？(單選)

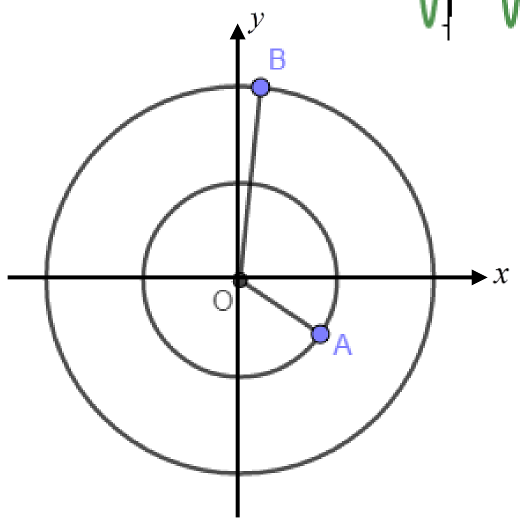
(A). $(-a-\sqrt{3}b,-\sqrt{3}a-b)$

(B). $(a-\sqrt{3}b,\sqrt{3}a+b)$

(C). $(-a-\sqrt{3}b,\sqrt{3}a-b)$

(D). $(-a-\sqrt{3}b,\sqrt{3}a+b)$

(E). $(a-\sqrt{3}b,\sqrt{3}a-b)$



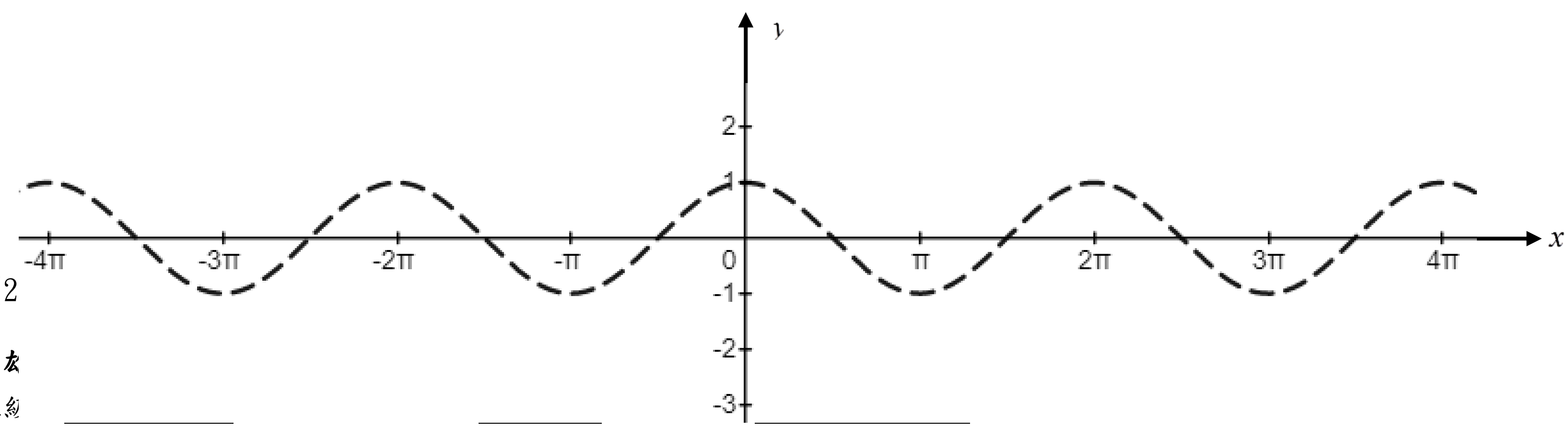
12. 設四邊形$ABCD$四點共圓且直徑$\overline{AC}$長為2，若$\overline{AB}-\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$\overline{CD}+\overline{BC}=\dfrac{3}{2}$，試求$\overline{BD}$之長

三、證明做圖題(共 14 分)

1. 已知α,β,γ為銳角，若$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，試證$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$(**5 分**)

2. 已知$y=\cos x$的圖形如下：

(1). 試利用$y=\cos x$的圖形做出$y=\cos x-|\cos x|$的圖形(**討論 4 分，做圖 2 分**，直接作在下列圖上)



(2

高

班

一、　多重選擇題(每題 6 分，共 18 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，三個以上得 0 分)

1.　ACDE	2.　ABD	3.　ABE

二、填充題

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
總分	8	16	24	30	36	42	48	54	58	62	66	68

1.　$\frac{56}{65}$	2.　$(4\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$	3.　$d>a>b>c$
4.　$\frac{\sqrt{3}}{3}$	5.　$\frac{\pi}{6}$	6.　$\frac{3}{5}\sqrt{5}$
7.　$\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$	8.　$\frac{3}{2}$	9.　11π
10.　$(\frac{3}{4},23)$	11.　(C)	12.　$\sqrt{3}$

三、證明做圖題(共 14 分)

1. 已知α,β,γ為銳角，若$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$，試證$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$(5 分)

$\because \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$　　$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\tan(\frac{\pi}{2}-\gamma)$

$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\cot\gamma=\frac{1}{\tan\gamma}$　　$\Rightarrow \tan\alpha\tan\gamma+\tan\beta\tan\gamma=1-\tan\alpha\tan\beta$

$\Rightarrow \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$

2.(1).　$y=\begin{cases}0 & \cos x\geq 0\\ -2\cos x & \cos x\leq 0\end{cases}$

2.(2)　$\because \begin{cases}y=\cos x-|\cos x|\\ y=-\frac{1}{6}(x+7)\end{cases}$ 有 5 個交點

$\therefore$ 方程式 $\cos x-|\cos x|=-\frac{1}{6}(x+7)$ 有 5 實根