

高雄中學 110 學年度第一學期高一數學科第二次月考試題

範圍：第二章、第三章(全)

(請將答案用原子筆寫在答案卷上，請小心計算，Good Luck!!)

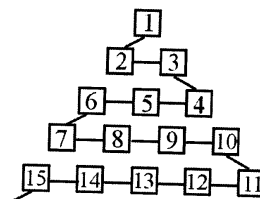
一、填充題：(共計 80 分)

1. 小杰參加銀行為期三年美金定存，約定每個月初存入10000元，已知銀行給的月利率為4%，若複利計息試幫小杰算出期滿後共可領回 _____ (A) _____ 元. ($1.04^{36} = 4.1039$)

2. 在座標平面上三角形 ABC 三頂點 $A(3, -1)$, $B(2, 5)$, $C(k, -6k + 5)$ ，已知三角形 ABC 的重心 G 在直線 $L_1: 3x + y - 7 = 0$ 的左側，也在直線 $L_2: 6x - 5y + 17 = 0$ 的右側，試求 k 的範圍為 _____ (B)

3. 若多邊形各內角成等差數列，公差 8° ，最大內角 194° ，求此多邊形邊數為 _____ (C)

4. 將自然數依序排列出如右圖的規則，數字1出現在第1列，數字2,3出現在第2列，數字4,5,6 (從右至左)出現在第3列，數字7,8,9,10出現在第4列，依此類推，試問第110列，從左至右算，第24個數字為 _____ (D)



5. 數列 $\{a_n\}$ 定義如下: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$, $\forall n \in N$ ，求 $\sum_{k=1}^{50} a_k =$ _____ (E)

6. 設 $A(1, 5)$, $B(4, 1)$, $C(2, -1)$, $L: mx - 2m - y + 6 = 0$ ，若直線 L 與三角形 ABC “不相交”，則 m 範圍為 _____ (F)

7. 設三直線 $L_1: 2x - 9y + 16 = 0$, $L_2: 9x - 2y - 5 = 0$, $L_3: 7x + 6y - 59 = 0$ 圍成三角形 $\triangle ABC$ ，求 $\triangle ABC$ 的內心坐標為 _____ (G)

8. 假設平面上 n 個圓最多可決定 a_n 個交點， $n \in N$ ，求一般項 $a_n =$ _____ (H)

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $A(14, -3)$ ， $\angle B$ 、 $\angle C$ 之角平分線方程分別為 $2x - y - 1 = 0$ 、 $x - 1 = 0$ ，則 \overline{BC} 直線方程式為 _____ (I) (請表示成 $ax + by + c = 0$ 的形式)

10. 若二次函數 $f(x) = x^2 + ax + b - 2$ ，(其中 $|x| \geq 2$) 圖形與 x 軸有交點，求 $a^2 + b^2$ 的最小值為 _____ (J)

11. 數列 $\{a_n\}$ 定義如下: $a_1 = 1$, $3 \sum_{k=1}^n a_k = (n+2)a_n$, $\forall n \geq 2$ ，試求 $\sum_{k=1}^{2021} \frac{1}{a_k} =$ _____ (K)

12. 設等差數列的首項與公差均為非負整數，滿足總項數不少於3項且各項的總和為 97^2 ，試問滿足這樣的等差數列共有 _____ (L) 組

13. 設座標平面上兩動點 $P(x, y), Q(x', y')$ ，滿足 $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = x + 4y - 3 \end{cases}$ ，已知 $P(x, y), Q(x', y')$ 兩動點軌跡均在同一條斜率為負的直線 L 上，

求直線 L 方程式為 _____ (M) (請表示成 $ax + by + c = 0$ 的形式)

14. 已知 $a_1 = 2$ ，平面上坐標 (a_n, a_{n+1}) 在函數 $f(x) = x^2 + 2x$ 的圖形上，其中 $n \in N$ ，令 $b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n + 2}$ ，且數列 $\{b_n\}$ 的前 n 項的和 S_n ，

$T_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$ ，求 $S_n + \frac{2}{3T_n - 1} =$ _____ (N)

15. 在座標平面中三條直線 $y=0$ ， $x-y=0$ ， $2x+y-6=0$ 所圍成三角形 $\triangle ABC$ 中，若動點 P, Q, R 分別在 $\triangle ABC$ 三邊長上，使得 PQR 三點形成三角形，試求三角形 $\triangle PQR$ 周長最小值為_____ (0)

二、計算證明題：(每大題 10 分共計 20 分)

1. (1) 若平面上兩直線 L_1, L_2 的斜率分別為 m_1, m_2 (其中 m_1, m_2 均為實數) 且直線 L_1 垂直直線 L_2 ，試證明： $m_1 \times m_2 = -1$. (5%)
(2) 在三角形 $\triangle ABC$ 中，頂點 $A(6,7)$ ， $B(-1,8)$ ， $C(2,9)$ ，試求三角形 $\triangle ABC$ 外心座標為何? (5%)

2. 設數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = \sqrt{2}$ ， $a_{n+1} = \sqrt{a_n^4 - na_n^2 + 1}$ ， $\forall n \in N$ ，試回答下列問題：

- (1) 求出 a_2, a_3, a_4 的值為何? (3%)
(2) 由(1)猜想出一般項 a_n 的通項公式為何? (2%)
(3) 試利用數學歸納法驗證(2)的猜想是成立的. (5%)

高雄中學 110 學年度第一學期高一數學科第二次月考答案卷

_____年_____組 姓名:_____ 座號:_____

(請將答案用原子筆寫在答案卷上，請小心計算，Good Luck!!)

一、填充題：(共計 80 分)

1 格	2 格	3 格	4 格	5 格	6 格	7 格	8 格	9 格	10 格	11 格	12 格	13 格	14 格	15 格
10 分	20 分	30 分	38 分	46 分	54 分	60 分	64 分	67 分	70 分	72 分	74 分	76 分	78 分	80 分

(A) 807014	(B) $k > 1$	(C) 12	(D) 6019	(E) 40475
(F) $\frac{-5}{2} < m < 1$	(G) (3,4)	(H) $n^2 - n$	(I) $6x - y + 69 = 0$	(J) $\frac{4}{5}$
(K) $\frac{2021}{1011}$	(L) 4	(M) $4x + 8y - 5 = 0$	(N) 1	(O) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

二、計算證明題：(共計 20 分)

1. (1) 證明：假設兩直線 L_1, L_2 相交於 $A(x_1, y_1)$ ，取 $B(x_2, y_2) \in L_1, C(x_2, y_3) \in L_2$

因為直線 L_1 垂直直線 L_2 ，所以 $\angle BAC = 90^\circ$ ，故 $\triangle ABC$ 為直角三角形

$$\text{由畢氏定理知 } \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_3)^2 = (y_2 - y_3)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = 0 \Leftrightarrow \frac{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)} = -1 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1. \quad (5\%)$$

(2) 外心座標為 (2,4) (5%)

2. (1) $a_2 = \sqrt{3}$ ， $a_3 = 2$ ， $a_4 = \sqrt{5}$ (3%)

(2) 猜測 $a_n = \sqrt{n+1}$ ， $\forall n \in N$. (2%)

(3) 證明：當 $n=1$ 時， $a_1 = \sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ 結論成立。

假設 $n=k$ 時， $a_k = \sqrt{k+1}$ 結論成立。

$$\text{則當 } n=k+1 \text{ 時， } a_{k+1} = \sqrt{a_k^4 - ka_k^2 + 1} = \sqrt{(\sqrt{k+1})^4 - k(\sqrt{k+1})^2 + 1}$$

$$= \sqrt{(k+1)^2 - k(k+1) + 1}$$

$$= \sqrt{k^2 + 2k + 1 - k^2 - k + 1}$$

$$= \sqrt{k+2}.$$

即當 $n=k+1$ 時， $a_{k+1} = \sqrt{(k+1)+1}$ 結論亦成立。

故根據數學歸納法， $a_n = \sqrt{n+1}$ ， $\forall n \in N$. (5%)