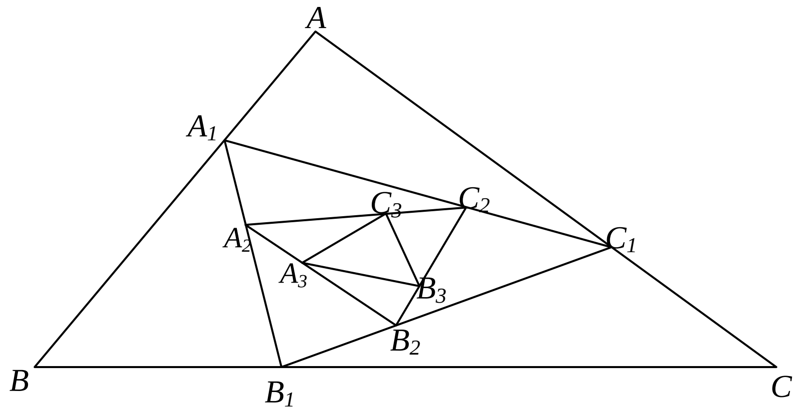
高雄中學 110 學年度第一學期高三第二、三類組數學科第二次月考試題(共兩頁)

一、 填充題: **(所有答案均需化至最簡，並以藍、黑色原字筆作答，否則不予計分)**

1. 無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+6}{5^n}=$ ____(A)____

2. 直角 ΔABC 中，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，在 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 上各取一點 A_1、B_1、C_1，使 $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}}=\frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}}=\frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1A}}=\frac{1}{2}$，設 $\Delta A_1B_1C_1$ 的面積為 a_1；在 $\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{C_1A_1}$ 上各取一點 A_2、B_2、C_2，使 $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_2B_1}}=\frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{B_2C_1}}=\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_2A_1}}=\frac{1}{2}$，設 $\Delta A_2B_2C_2$ 的面積為 a_2；在 $\overline{A_2B_2}$、$\overline{B_2C_2}$、$\overline{C_2A_2}$ 上各取一點 A_3、B_3、C_3，使 $\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_3B_2}}=\frac{\overline{B_2B_3}}{\overline{B_3C_2}}=\frac{\overline{C_2C_3}}{\overline{C_3A_2}}=\frac{1}{2}$，設 $\Delta A_3B_3C_3$ 的面積為 a_3；依此規則可得無窮數列 $\langle a_n\rangle$，則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$ ____(B)____



3. 袋中有 1000 個紅球、2000 個黃球、3000 個綠球，設又加入 $3n$ 個紅球、$2n$ 個黃球、n 個綠球後，每球被取機會均等，其中 $n\in N$。若一次取 2 球，此兩球均為同色球的機率為 P_n，則 $\lim_{n\to\infty}P_n=$ ____(C)____

4. 設 a,b 為實數，$\lim_{n\to\infty}(\frac{an^2+bn+7}{3n+1}-\frac{n^2-n+1}{n+2})=2$，則數對 $(a,b)=$ ____(D)____

5. 設 $n\in N$，多項式 $f(x)=x^{n+1}-x^{n-1}+1$，$g(x)=x^{2n-2}+x^n-1$，$f(x)$ 除以 $x-9$ 所得餘式為 R_n，$g(x)$ 除以 $x-3$ 所得餘式為 r_n，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{R_n}{r_n}=$ ____(E)____

6. 設 $n\in N$，a_n、b_n 為 $x^2-nx+(2n-5)=0$ 之兩根，且 $a_n<b_n$，則 $\lim_{n\to\infty}a_n=$ ____(F)____

7. 設 $n\in N$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k\times(k+2)}$，$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，則

   (1) $S=$ ____(G)____

   (2) 若 $|S_n-S|\le\frac{1}{100}$，則最小的自然數 $n=$ ____(H)____

8. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{a_n+1}=1$，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-5}{3-a_n}=$ ____(I)____

二、 多重選擇題: (每題至少有 1 個是正確的選項)

1. 下列有關循環小數的敘述中，請選出正確的選項。

(1) $1.\overline{9}=2$　(2) $0.\overline{7}-0.\overline{3}=0.\overline{9}-0.\overline{5}$　(3) $0.5\overline{2}+0.4\overline{8}=1$

(4) $0.\overline{7}\times 0.\overline{3}=0.\overline{21}$　(5) $0.6\overline{7}-0.\overline{57}=0.1$

2. 請選出收斂的數列。

(1) $\left\langle (\tan 136^\circ)^n \right\rangle$　(2) $\left\langle (\tan 1)^n \right\rangle$　(3) $\left\langle \dfrac{(\sqrt{6}+1)^n+(\sqrt{6}-1)^n}{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n} \right\rangle$

(4) $\left\langle \sin(n\pi) \right\rangle$　(5) $\left\langle \cos(n\pi) \right\rangle$

3. 請選出正確選項。

(1) 設$\langle a_n \rangle$為任意數列，則數列$\langle n\cdot a_n \rangle$必發散

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$，則無窮級數$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必發散。

(3) 設$\langle a_n \rangle$為收斂數列，則$\left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle$必為收斂數列

(4) 設$\langle a_n+b_n \rangle$、$\langle a_n-b_n \rangle$為兩收斂數列，則$\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$必均為收斂數列

(5) 設$\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$為兩收斂數列，且對所有的正整數n，$a_n<c_n<b_n$均成立，則$\langle c_n \rangle$必為收斂數列。

4. 請選出滿足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$ 的數列$\langle a_n \rangle$。

(1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=a_{n-1}-2^{3-n}, n\ge 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1=5 \\ a_n=25-4a_{n-1}, n\ge 2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_1=10 \\ a_n-5=\dfrac{3}{5}(a_{n-1}-5), n\ge 2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{100} \\ a_n-5=\dfrac{6}{5}(a_{n-1}-5), n\ge 2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=\sqrt{4a_{n-1}+5}, n\ge 2 \end{cases}$

三、 計算題: (請詳列過程,否則不計分)

費氏數列$\langle a_n \rangle$滿足$\begin{cases} a_1=1，a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \end{cases}$，$n\in N$，且已知數列$\left\langle \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\rangle$會收斂至一數 t；數列$\langle b_n \rangle$滿足

$b_n=(t+\dfrac{1}{t})(t^2+\dfrac{1}{t^2})(t^4+\dfrac{1}{t^4})\cdots(t^{2^n}+\dfrac{1}{t^{2^n}})$，試問:

1. t 之值為何?

2. 已知當c為定數且$c>0$時，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$ (免證明) 。

試判斷無窮數列$\left\langle \sqrt[2^n]{b_n} \right\rangle$是否收斂？若收斂，請求出其極限。

高雄中學 110 學年度第一學期高三第二、三類組數學科第二次月考答案卷

______年______組　座號:_______ 姓名:___________

一、 填充題: (60%)

對格	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分數	8	16	24	32	40	45	50	55	60

✻所有答案均需化至最簡，並以藍、黑色原字筆作答，否則不予計分

(A) 3	(B) 3	(C) $\frac{7}{18}$	(D) $(3,-2)$	(E) 80
(F) 2	(G) $\frac{3}{2}$	(H) 199	(I) -2	

二、多選題: (28%) (每題全對給 7 分，錯一選項給 4 分，其他情形不給分)

題號	1	2	3	4
答案	12	134	24	235

四、 計算與證明題: (12%)(請詳列過程,否則不計分)

1. (7 分)

$\because a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$

$\Rightarrow t=1+\frac{1}{t}$

$\Rightarrow t^2-t-1=0$

$\Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$(負不合)

$\Rightarrow t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. (5 分)

$\because t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　$\therefore \frac{1}{t}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\Rightarrow t-\frac{1}{t}=1$且$1-\frac{1}{t}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}>0$

$\Rightarrow \sqrt[2^n]{b_n}=\sqrt[2^n]{(t+\frac{1}{t})(t^2+\frac{1}{t^2})(t^4+\frac{1}{t^4})\cdots(t^{2^n}+\frac{1}{t^{2^n}})}$

$=\sqrt[2^n]{(t-\frac{1}{t})(t+\frac{1}{t})(t^2+\frac{1}{t^2})(t^4+\frac{1}{t^4})\cdots(t^{2^n}+\frac{1}{t^{2^n}})}$

$=\sqrt[2^n]{(t^{2^{n+1}}-\frac{1}{t^{2^{n+1}}})}$

$=t^2\sqrt[2^n]{(1-\frac{1}{t^{2^{n+2}}})}$

又$\sqrt[2^n]{1-\frac{1}{t}}<\sqrt[2^n]{(1-\frac{1}{t^{2^{n+2}}})}<\sqrt[2^n]{1}$　$(\because t>1)$且

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{1-\frac{1}{t}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{1}=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{(1-\frac{1}{t^{2^{n+2}}})}=1$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2^n]{b_n}=t^2\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-\frac{1}{t^{4n}})}=t^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

高雄中學 110 學年度第一學期高三第二、三類組數學科第二次月考答案卷

______年______組　　座號:_______　姓名:___________

一、　填充題: (60%)

對格	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分數	8	16	24	32	40	45	50	55	60

＊所有答案均需化至最簡，並以藍、黑色原字筆作答，否則不予計分

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
(F)	(G)	(H)	(I)	

二、多選題: (28%) (每題全對給 7 分，錯一選項給 4 分，其他情形不給分)

題號	1	2	3	4
答案				

三、　計算與證明題: (12%)(請詳列過程,否則不計分)

1. (7 分)	2. (5 分)