高雄中學 107 學年度數學科學科能力競賽初試第一階段試題

說明:試題均為填充題，請將答案填入答案欄。

填充題（共 20 題，每題 10 分，總共 200 分）

1. 若$\dfrac{107^{47}\cdot 106^{46}\cdot 105^{45}\cdot 104^{44}\cdot\ldots\cdot 62^{2}\cdot 61}{47\cdot 46^{2}\cdot 45^{3}\cdot 44^{4}\cdot\ldots\cdot 2^{46}\cdot 1^{47}}=\dfrac{\text{n}}{\text{m}}$，其中 m,n 為互質的正整數，試求 m 之值。

答：1

$$\frac{107^{47}\cdot 106^{46}\cdot 105^{45}\cdot 104^{44}\cdot\ldots\cdot 62^{2}\cdot 61}{47\cdot 46^{2}\cdot 45^{3}\cdot 44^{4}\cdot\ldots\cdot 2^{46}\cdot 1^{47}}=C^{107}_{1}\times C^{107}_{2}\times C^{107}_{3}\times\ldots\times C^{107}_{47}$$ 為一正整數。

2. 定義 n!=1×2×3×⋯×n ,試比較下列五數的大小：

a= 1000!, b= 400!×400!×200!,c= 500!×500!,d= 600!×300!×100!,e= 700! ×300!。

答：$a>e>c>d>b$

因為$\frac{a}{b}=C^{1000}_{600}C^{600}_{200}$, $\frac{a}{c}=C^{1000}_{500}$, $\frac{a}{d}=C^{1000}_{600}C^{400}_{100}$, $\frac{a}{e}=C^{1000}_{300}$

所以知 a 最大，且 $b<d$, $c<e$

又$\frac{c}{d}=\frac{500!500!}{600!300!100!}=\frac{500!}{600\cdot 599\cdot 598\cdots 501\cdot 300!100!}>\frac{500!}{300!200!}=C^{500}_{200}>1$

所以 $c>d$

3. 若 x,y,z 均為正數，且滿足 $x+\frac{1}{y}=4$ ，$y+\frac{1}{z}=1$ ，$z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$ ，試求 $x\cdot y\cdot z$ 之乘積。

答：1

原式可得$\begin{cases} xy+1=4y \\ yz+1=z \\ zx+1=\frac{7}{3}x \end{cases}$，三式相乘得$(xyz)^2+(xy+yz+zx)+xyz\,(x+y+z)+1=\frac{28}{3}xyz$

$$(xyz)^2+xyz\,(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+xyz\,(x+y+z)+1=\frac{28}{3}xyz$$

又原三式相加得 $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{22}{3}$

所以$(xyz)^2 - 2xyz + 1 = 0$, $xyz = 1$

4. 試找出所有的有序正整數數對(x, y)，使得其和$x+y$、其差$x-y$、其積xy與其商$\frac{x}{y}$等四項總和為 735。

答：(90, 6)

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=735$$

$$2x+xy+\frac{x}{y}=735 \quad , \qquad \frac{x}{y}\left(2y+y^2+1\right)=735 \quad , \qquad \frac{x}{y}(y+1)^2=15\times 7^2$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{x}{y}=15 \\ y+1=7 \end{cases}$$

5. 若 n 為正整數，且滿足正整數 $2n$ 有 28 個正因數，正整數 $3n$ 有 30 個正因數，試求正整數 $6n$ 有多少個正因數。

答：35

設 $n=2^a 3^b p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_n}$ ，其中 2、3、$p_1,p_2,\dots,p_k$ 為相異質數。

由題意得$(a+2)(b+1)(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_k+1)=28$，且$(a+1)(b+2)(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_k+1)=30$

相減得$(a-b)(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_k+1)=2$，所以 $a-b=1$ 或 2

若 $a-b=1$，$\frac{(a+2)(b+1)}{(a+1)(b+2)}=\frac{(b+3)(b+1)}{(b+2)(b+2)}=\frac{28}{30}$ ，得 $b^2+4b-9=0$，b 非整數

若 $a-b=2$，$\frac{(a+2)(b+1)}{(a+1)(b+2)}=\frac{(b+4)(b+1)}{(b+3)(b+2)}=\frac{28}{30}$ ，得 $b^2+5b-24=0$，$b=3$，此時 $n=2^5\times 3^3$

所以 $6n=2^6\times 3^4$ ，共有(6+1)(4+1)=35 個正因數

6. 試求最大的正整數 x， 使得 $x^2-10x+100$ 為一完全平方數。

答：42

令 $k^2=x^2-10x+100=(x-5)^2+75$，$k>0$ 。

則 $75=k^2-(x-5)^2=(k+x-5)(k-x+5)$為兩正整數乘積，

所以數對$(k+x-5\,,\,k-x+5)=(75, 1)$或$(25, 3)$或$(15, 5)$或$(5, 15)$或$(3,25)$或$(1,75)$

得$(k, x)=(38, 42)$ 或$(14, 16)$ 或 $(10, 10)$ 或 $(10, 10)$ 或 $(14, 0)$ 或 $(38, -32)$

7. 試求 $x^4-x^2-2x-1=0$ 的所有實根。

答：$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$$x^4-x^2-2x-1=x^4-(x^2+2x+1)=x^4-(x+1)^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

8. 試判斷 $x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=1$ 的實根個數。

答：1

$$x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=1\Rightarrow x^2+\sqrt{x^3+1}=(1-x)^2=x^2-2x+1\Rightarrow x^3+1=(-2x+1)^2=4x^2-4x+1$$

$$\Rightarrow x^3-4x^2+4x=0\ ,\ x=0\text{或}2\ ,$$

但 x=2 時等式不成立，故只有一解。

9. 已知 a,b,c 為△ABC 的三邊長，且為方程式 $2x^3-16x^2+38x-23=0$ 之三根，

試求 $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}$ 之值。

答：$\dfrac{26}{23}$

由根與係數關係知 $\begin{cases} a+b+c=8 \\ ab+bc+ca=19 \\ abc=\dfrac{23}{2} \end{cases}$，

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a\times 2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b\times 2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c\times 2ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}{2abc}=\frac{26}{23}$$

10. 已知 $i=\sqrt{-1}$，試問有多少組實數數對 (x,y) 使得 $(x+yi)^{2018}=x-yi$。

答：2020

$(x+yi)^{2019}=x^2+y^2$，

若 $x^2+y^2=0,(x,y)=(0,0)$；若 $x^2+y^2>0$，則由棣美弗定理知有 2019 個根。

11. 三角錐 A-BCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$ 兩兩互相垂直，且 $\overline{AB}=2$、$\overline{AC}=3$、$\overline{AD}=4$。試求△BCD 面積。

答：$\sqrt{61}$

$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ADB$ 面積分別為 3,6,4。

由廣義畢氏定理，知$\triangle BCD$ 面積 $=\sqrt{3^2+6^2+4^2}=\sqrt{61}$

12. 已知有五個正整數的平均值為 5，中位數為 5 且只有一個眾數為 8。試求這五個正整數中，最大的數與最小的數之差值

答：7

由題意可知 5 數為 a,b,5,8,8。其中 a<b，且 a+b+5+8+8=25，所以 a=1,b=3

13. 已知$\{a_n\}$、$\{b_n\}$皆為等差數列，且$\frac{a_1}{b_1}=\frac{4}{7}$、$\frac{a_2}{b_2}=\frac{3}{5}$、$\frac{a_3}{b_3}=\frac{7}{11}$，試求$\frac{a_4}{b_4}$。

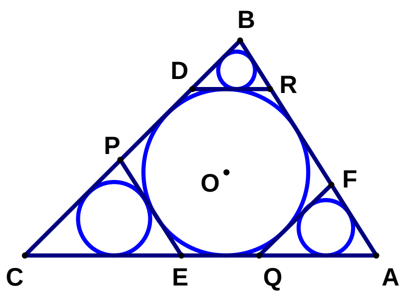
答：$\frac{13}{19}$

設兩數列公差分別為 d_1,d_2，則$\frac{a_1}{b_1}=\frac{4}{7}$，$\frac{a_1+d_1}{b_1+d_2}=\frac{3}{5}$，$\frac{a_1+2d_1}{b_1+2d_2}=\frac{7}{11}$

可得 $a_1:b_1:d_1:d_2=16:28:(-1):(-3)$

所以$\frac{a_4}{b_4}=\frac{a_1+3d_1}{b_1+3d_2}=\frac{13}{19}$

14. 如圖，ΔABC 的三邊長為 5、6、7。圓 O 為ΔABC 的內切圓，又作三條分別平行於三角形各邊的圓的切線$\overleftrightarrow{QF},\overleftrightarrow{PE},\overleftrightarrow{RD}$，再分別在ΔAFQ、ΔBDR、ΔCEP 中作內切圓，試求此四個圓的面積和。



答：$\frac{880\pi}{243}$

$s=\frac{5+6+7}{2}=9$，所以內切圓半徑$=\frac{\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}}{9}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

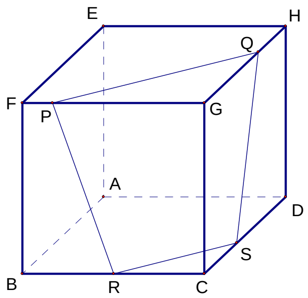
又各邊上的高分別為$\frac{12\sqrt{6}}{5}$，$2\sqrt{6}$，$\frac{12\sqrt{6}}{7}$

ΔAFQ、ΔBDR、ΔCEP 的內切圓半徑和ΔABC 的內切圓半徑比分別為

$2\sqrt{6} : (2\sqrt{6} - 2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}) = 3:1$，$\frac{12\sqrt{6}}{7} : (\frac{12\sqrt{6}}{7} - 2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}) = 9:2$，$\frac{12\sqrt{6}}{5} : (\frac{12\sqrt{6}}{5} - 2\times\frac{2\sqrt{6}}{3}) = 9:4$

所以各內切圓面積和$= [1+(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{9})^2+(\frac{4}{9})^2] \times \pi(\frac{2\sqrt{6}}{3})^2 = \frac{880\pi}{243}$

15. *ABCDEFGH* 為稜長 6 的正立方體，向此立方體切一刀，分別交 $\overline{GF}$ 於 *P*、交 $\overline{GH}$ 於 *Q*、交 $\overline{BC}$ 於 *R*、交 $\overline{CD}$ 於 *S*。已知 $\overline{PF} = 1$，$\overline{QH} = 2$，$\overline{BR} = 3$，試求 $\overline{DS}$ 長度。



答：$\frac{18}{5}$

將其坐標化：A(0,0,0),B(6,0,0),D(0,6,0),E(0,0,6)，

則可得 P(6,1,6), Q(2,6,6), R(6,3,0)。得 PQR 平面方程式為 $15x + 12y + 4z = 126$

因為 S 在平面上，所以得 S 坐標為$(\frac{18}{5}, 6, 0)$

16. 已知函數f有一個性質，如果實數x在其定義域內，則$\frac{1}{x}$

也在其定義域內，且滿足以下性質：$f(x) + f(\frac{1}{x}) = x$。試求函數$f$ 之定義域。

答：$\{-1,1\}$

因為 $x = f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$，所以 $x = \pm 1$

17. 考慮由兩個或兩個以上連續正整數所組成的集合，試求滿足集合中所有的數之和等於 99 的集合個數。

答：5 個

直接討論元素個數，即可知只有 5 種情形。

個數=2,集合為{49,50}

個數=3,集合為{32,33,34}

個數=6,集合為{14,15,16,17,18,19}

個數=9,集合為{7,8,9,10,11,12,13,14,15}

個數=11,集合為{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14}

18. 已知集合{1, 2, 3,…,15}，試求有多少個非空子集合 S 同時滿足下列兩個性質？ (1)集合 S 中不含接續的整數。 (2) 集合 S 中有 k 個數，則 S 中的每個數都不小於 k。

答：405 個

討論 k 值情形：

k=1 →有 15 個

k=2 →有 H_{11}^{3}=78 個

k=3 →有 H_{8}^{4}=165 個

k=4 →有 H_{5}^{5}=126 個

k=5 →有 H_{2}^{6}=21 個

合計 405 個

19. 定義數列$\{a_{ij}\}$, a_{ij}=$\begin{cases} 1, j=0 \\ 1, i=j \\ a_{i-1,j-1}+a_{i-1,j}, i\neq j \end{cases}$,其中 $i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,且 j不大於i。

試求 $2\cdot a_{91}+2^2\cdot a_{92}+2^3\cdot a_{93}+2^4\cdot a_{94}+2^5\cdot a_{95}+2^6\cdot a_{96}+2^7\cdot a_{97}+2^8\cdot a_{98}+2^9\cdot a_{99}$之值。

答：19682

可知 a_{ij}= C_j^i ，所求=$2C_1^9+2^2C_2^9+2^3C_3^9+...+2^9C_9^9$ $=3^9-1$ =19682

20. 用 10 塊 1×2 的磁磚可在牆上鋪成一塊 2×10 的區域。請問要鋪成這塊 2×10 的區域共有多少種不同的方法？

答：89

設鋪成 2×n 區域的方法數為 a_n，則可得遞迴關係$\begin{cases} a_1=1, a_2=2 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \end{cases}$

所求為 a_{10}=89