高雄中學 107 學年度校內數學競賽　第二階段試題

1. 設n為正整數。若多項式$x^{2n}+x^n+1$是x^2+x+1的倍式，試求所有n值所成之集合。

2. 設$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$。試求$\dfrac{3\sqrt{3}}{\cos\theta}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\theta}$的最小值，並求此時之$\tan\theta$值。

3. 設P為$\Delta\mathrm{ABC}$外接圓上異於A,B,C的點。從P作三邊所在直線之垂線，垂足分別為D,E,F，試證明D,E,F三點共線。

4. 設n為正整數。試證費馬數$2^{2^n}+1$不可能為完全立方數。

5. 設m,n為正整數。試求滿足$4\times13^m-25\times3^n=1$的所有數對$(m,n)$。

6. 銳角$\Delta\mathrm{ABC}$中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$於$D$，$P$為$\overline{AD}$上一點。設$\overrightarrow{BP}$交$\overline{AC}$於$E$，$\overrightarrow{CP}$交$\overline{AB}$於$F$。試證 $\angle ADE=\angle ADF$。

7. (1) 設$\overline{AB}$為一半徑r，圓心O的圓上一弦。若點P在$\overline{AB}$上，試證$\overline{AP}\bullet\overline{PB}=r^2-\overline{OP}^2$

   (2) 設$\Delta\mathrm{ABC}$的重心G，外接圓O。若射線$\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CG}$分別交圓$O$於$A',B',C'$，

   試證：$\dfrac{GA}{GA'}+\dfrac{GB}{GB'}+\dfrac{GC}{GC'}=3$

8. 給定一相異實數 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ 的數列，能藉著『一個氣泡』或『多個氣泡』通過的方式以遞增次序排列。『一個氣泡』指的是對一已知的數列，把該數列的第二項與第一項作比較，兩項必需交換若且唯若第二項是較小的數值，接著將第三項與第二項作比較，兩項必需交換若且唯若第三項是較小的數值，以此類推，一直做到最後一項與其前面的項都進行過兩兩的比較，當它們必需對調若且唯若最後一項 x_n 是較小的數值。以下例子說明數列 $2,0,1,8$，藉由一個氣泡通過而被轉換成新數列 $0,1,2,8$，且在每一步兩兩進比較都會以下底線作表示。

$$\begin{array}{c} \underline{2}\ \underline{0}\ 1\ 8 \\ 0\ \underline{2}\ \underline{1}\ 8 \\ 0\ 1\ \underline{2}\ \underline{8} \\ 0\ 1\ 2\ 8 \end{array}$$

假設 $n=40$，而最初的數列為 $x_1, x_2, \cdots, x_{39}, x_{40}$，其中各項數值皆為不同的實數且次 序是以隨機方式排列。試求經過一次的氣泡通過之後，x_{10} 正好會落在第 30 個位置的機率。

9. 有一 10×10 公分的正方形，在其內部(包含邊上)有 60 個相異點。證明：必存在兩點間的距離小於等於 $\sqrt{3}$。

10. 設 n 為正整數。令集合 $T=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 對於其子集 $\phi \neq S=\{s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k\} \subseteq T$ 其中 $s_1 > s_2 > s_3 > \cdots > s_k$ 定義

$$f(\phi)=0\ ；\ f(S)=s_1-s_2+s_3-s_4\cdots+(-1)^{k+1}s_k$$

試求 $\sum_{S\subseteq T} f(S)$ 之值(以 n 表示之)，也就是 T 所有子集 S 之 $f(S)$ 的總和。