高雄中學 108 學年度數學科學科能力競賽初試第一階段試題

★說明：試題分為兩部分。第一部分為填充題，請將答案填入答案欄；第二部分為計算證明題，請將作答過程填寫在題目底下空白作答卷上。請用黑色或藍色原子筆作答，否則扣總成績 10 分.

一、填充題 (共 15 題，每題 8 分，共 120 分)

1. 設 n 為正整數，若 $1+2+3+\cdots+n$ 的和是一個各位數字均相同的三位數，求所有可能的 n 值.

註解 [1]: 數論 出處：2019 新疆預賽

2. $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A, \cos B$ 為方程 $5x^2-3x-1=0$ 的兩根，求 $\tan A\tan B$ 的值.

註解 [2]: 代數 出處：2019 全國聯賽 B 卷

3. 設數列 $<a_n>$ 滿足對任意正整數 n，都有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3$，求 $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{108}-1}$ 的值.

註解 [3]: 代數

4. 一個分數 $\frac{q}{p}(p,q\in\mathbb{N})$ 的小數表示為 $0.2019\cdots\cdots$，求 p 的最小值.

註解 [4]: 數論 出處：單墫 我怎樣解題 P201

5. 求方程式 $x^2+9x-7=6\sqrt{x^3-1}$ 所有實根的乘積.

註解 [5]: 代數 出處：國際數學奧林匹克－香港選拔賽初賽 2018

6. 設 a_n 為 $\log_2 n, \log_3 n, \cdots, \log_{2019} n$ 中，對數值為整數的個數，求 $\sum_{n=1}^{2019} a_n$ 的值.

註解 [6]: 出處：2019 中等數學第三期 2018 中國數學奧林匹克希望聯盟夏令營(三)

7. 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AB}+\overline{CD}=18$，$\overline{BC}+\overline{AD}=21$，求四邊形 $ABCD$ 面積的最大值.

註解 [7]: 幾何 出處：108 桃園聯招教甄題、邹生書公眾號亦有(9/12)

8. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=17$，若 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{2}{3}$，試求 $\overline{AB}$ 的長.

註解 [8]: 出處：國際數學奧林匹克－香港選拔賽初賽 2019

9. 已知 a,b 為相異實數，滿足 $\begin{cases} a^3=3ab^2+11 \\ b^3=3a^2b+2 \end{cases}$，求 a^2+b^2 的值

註解 [9]: 複數解最快

10. 平面上有 108 個三角形，最多可以將平面分成多少個區域？

註解 [10]: 出處：陳題，國際數學奧林匹克－香港選拔賽初賽 2019

11. 空間中，已知三個半徑為 1 的球互相外切，且每個球都同時與另兩個半徑為 r 的球外切，若這兩個半徑為 r 的球也互相外切，求 r 的值.

註解 [11]:
出處：學數學　全國高中數學聯賽模似題精選 第 18 回

12. 若實數 θ 滿足 $\log_{\cos\theta}32=\log_{(\cos\theta+2\sin\theta)}108=\log_{\sin\theta}48$，求 $\cot\theta$ 的值.

註解 [12]:
出處：學數學　全國高中數學聯賽模似題精選 2018 秋季賽

13. 已知 x,y 為正實數，且 $\frac{8}{x^2}+\frac{1}{y}=1$，求 $x+y$ 的最小值.

註解 [13]:
出處：邹生書公眾號群題 2019.08.28

14. 設 p 為大於 2 的質數，且 $p\mid 2019^8+1$，求 p 的最小值.

註解 [14]:
出處：2019AIME

15. 投擲三顆公正骰子，求這三顆骰子中有兩顆骰子出現的點數和等於 7 的機率.

二、計算證明題（共三題，每題 20 分，共 60 分）

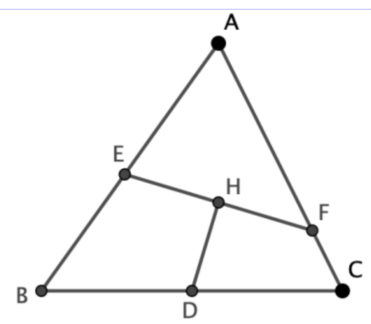
1. 若 a,b,c 為有理數，且 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 也是有理數，證明：$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 都是有理數.

註解 [15]:
出處：中等數學 2008 第七期數奧高中訓練題

2. 設 n 為正整數，證明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>\frac{2n}{3n+2}$

3. 如右圖，設 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，D 為 $\overline{BC}$ 中點，過 H 且垂直 $\overline{DH}$ 的直線分別交 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 於 E,F 兩點，
求證：H 為 $\overline{EF}$ 的中點

註解 [16]:
幾何
出處：小數君精選 15 套高聯全真模似題第 15 回



高雄中學 108 學年度數學科學科能力競賽初試第一階段試題作答卷

★說明：第一部分為填充題，請將答案填入答案欄；第二部分為計算證明題，請將作答過程填寫在題目底下空白作答卷上。請用黑色或藍色原子筆作答，否則扣總成績 10 分.

一、填充題 (共 15 題，每題 8 分，共 120 分)

填 1.	填 2.	填 3.	填 4.
填 5.	填 6.	填 7.	填 8.
填 9.	填 10.	填 11.	填 12.
填 13.	填 14.	填 15.	

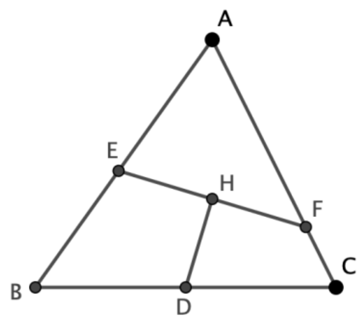
二、計算證明題 (共三題，每題 20 分，共 60 分)

1. 若 a, b, c 為有理數，且 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 也是有理數，證明：$\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 也是有理數.

2. 設 n 為正整數，證明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>\frac{2n}{3n+2}$

3. 如右圖，設 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，D 為 $\overline{BC}$ 中點，過 H 且垂直 $\overline{DH}$ 的直線分別交 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 於 E,F 兩點，

求證：H 為 $\overline{EF}$ 的中點



高雄中學 108 學年度數學科學科能力競賽初試第一階段試題答案卷

★說明：第一部分為填充題，請將答案填入答案欄；第二部分為計算證明題，請將作答過程填寫在題目底下空白作答卷上。請用黑色或藍色原子筆作答，否則扣總成績 10 分.

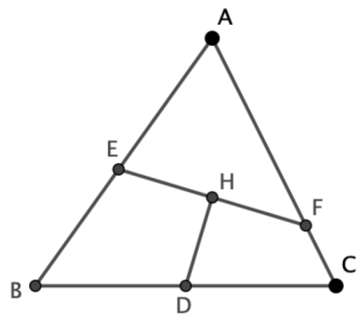
一、填充題 (共 15 題，每題 8 分，共 120 分)

填 1. 36	填 2. $-\sqrt{7}$	填 3. $\frac{107}{324}$	填 4. 104
填 5. 17	填 6. 4104	填 7. 81	填 8. 13
填 9. 10	填 10. 34670	填 11. $\frac{1}{6}$	填 12. 送分
填 13. 6	填 14. 97	填 15. $\frac{5}{12}$	

二、計算證明題(共三題，每題 20 分，共 60 分)

1. 若 a,b,c 為有理數，且 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 也是有理數，證明：$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ 也是有理數.
2. 設 n 為正整數，證明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>\frac{2n}{3n+2}$
3. 如右圖，設 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，D 為 $\overline{BC}$ 中點，過 H 且垂直 $\overline{DH}$ 的直線分別交 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 於 E,F 兩點，

   求證：H 為 $\overline{EF}$ 的中點



高雄中學 108 學年度數學科學科能力競賽初試第一階段試題詳解

一、填充題

1. 設 n 為正整數，若 $1+2+3+\cdots+n$ 的和是一個各位數字均相同的三位數，求所有可能的 n 值.

   答案：36

   解：設 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=aaa=a\times 111=a\times 3\times 37$，則 $n(n+1)=a\times 6\times 37$

   $n, n+1$ 為連續正整數，故 $a=6$，因此，$n=36$。

2. $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A, \cos B$ 為方程 $5x^2-3x-1=0$ 的兩根，求 $\tan A\tan B$ 的值.

   答案：$-\sqrt{7}$

   解：由根與係數知 $\cos A+\cos B=\frac{3}{5}$，$\cos A\cos B=-\frac{1}{5}$，而

   $$(\sin A\sin B)^2=(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)=1-\cos^2 A-\cos^2 B+\cos^2 A\cos^2 B$$
   $$=(1+\cos A\cos B)^2-(\cos A+\cos B)^2=(\frac{4}{5})^2-(\frac{3}{5})^2=\frac{7}{25}$$

   因為 $\sin A, \sin B$ 均為正，所以 $\sin A\sin B=\frac{\sqrt{7}}{5}$

   因此，$\tan A\tan B=\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=-\sqrt{7}$

3. 設數列 $<a_n>$ 滿足對任意正整數 n，都有 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^3$，求 $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{108}-1}$ 的值.

   答案：$\frac{107}{324}$

   解：由題意知 $a_n=n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$，$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{3n^2-3n}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

   所求 $=\sum_{n=2}^{108}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{108}\right)=\frac{107}{324}$

4. 一個分數 $\frac{q}{p}$ ($p, q\in\mathbb{N}$) 的小數表示為 $0.2019\cdots$，求 p 的最小值.

   答案：104

   解：因為 $0.2019<\frac{q}{p}$，故 $p<\frac{q}{0.2019}<\frac{q}{0.2}=5q\Rightarrow p\le 5q-1$。由題意知

   $\frac{q}{p}<0.2020\Rightarrow q\le(5q-1)\times 0.2020\Rightarrow 1000q\le(5q-1)\times 202$，可得 $q\ge\frac{202}{10}=20.2$，即 $q\ge 21$

   而 $p>\frac{q}{0.2020}\ge\frac{21}{0.202}=103.96\cdots$，即 $p\ge 104$，因此 p 的最小值為 104

5. 求方程式 $x^2+9x-7=6\sqrt{x^3-1}$ 所有實根的乘積.

答案：17

解：原方程式可改寫為 $(x^2+x+1)+8(x-1)=6\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$，令 $a=\sqrt{x-1}$，$b=\sqrt{x^2+x+1}$

則 $b^2-6ab+8a^2=0\Rightarrow b=2a$ 或 $b=4a$

$b=2a\Rightarrow\sqrt{x^2+x+1}=2\sqrt{x+1}\Rightarrow x^2-3x+5=0$，此方程沒有實數解

$b=4a\Rightarrow\sqrt{x^2+x+1}=4\sqrt{x+1}\Rightarrow x^2-15x+17=0$，此方程有兩個實數解

因此，原方程式有所有實根乘積為 17

6. 設 a_n 為 $\log_2 n,\log_3 n,\cdots,\log_{2019} n$ 中，對數值為整數的個數，求 $\sum_{n=1}^{2019} a_n$ 的值.

答案：4104

解： a_n 為 $\log_2 n,\log_3 n,\cdots,\log_{2019} n$ 中對數值為整數的個數，

令 b_m 為 $\log_m 1,\log_m 2,\cdots,\log_m 2019$ 中對數值為整數的個數，則 $\sum_{n=1}^{2019} a_n=\sum_{m=2}^{2019} b_m$

$b_2=11$，$b_3=7$，$b_4=6$，$b_5=b_6=5$，$b_7=b_8=\cdots=b_{12}=4$，$b_{13}=b_{14}=\cdots=b_{44}=3$

$b_{45}=b_{46}=\cdots=b_{2019}=2$

因此，$\sum_{n=1}^{2019} a_n=\sum_{m=2}^{2019} b_m=11+7+6+2\times5+6\times4+32\times3+1975\times2=4104$

7. 設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AB}+\overline{CD}=18$，$\overline{BC}+\overline{AD}=15$，求四邊形 $ABCD$ 面積的最大值.

答案：81

解：設 S 為四邊形 $ABCD$ 的面積，則 $S=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}$。因為 $ABCD$ 為圓內接四邊形，由托勒密定理得

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$。而 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$，可得 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$

再由題意可得

$18^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2\overline{AB}\cdot\overline{AC}$，$15^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\overline{AD}\cdot\overline{BC}$，將兩式相加得到

$$18^2+15^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)+4S$$
$$\geq(\overline{AD}+\overline{BC})^2+4S=15^2+4S$$

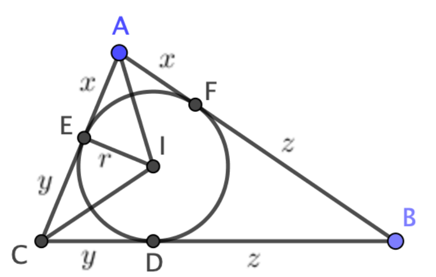
於是，$4S\leq18^2$，$S\leq81$

當 $\overline{AD}=\overline{BC}=\frac{15}{2}$ 時，等號成立.

8. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=17$，若 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{2}{3}$，試求 $\overline{AB}$ 的長.

答案：13

解：如右圖，設 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 r，D,E,F 為內切圓與三邊的切點



設 $\overline{AE}=\overline{AF}=x$，$\overline{CE}=\overline{CD}=y$，$\overline{BD}=\overline{BF}=z$，

則 $x+y=6$，$z+y=17$，由題意 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{2}{3}=\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}\Rightarrow r^2=\frac{2}{3}xy$

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{(x+y+z)xyz}=r\cdot(x+y+z)$，兩邊平方化簡得

$xyz=r^2(x+y+z)=\frac{2}{3}xy(x+y+z)$，所以 $z=2(x+y)=12$，$y=5$，$x=1$

因此，$\overline{AB}=x+z=13$

9. 已知 a,b 為相異實數，滿足 $\begin{cases}a^3=3ab^2+11\\ b^3=3a^2b+2\end{cases}$，求 a^2+b^2 的值.

答案：5

解：[解法一]

$(a^3-3ab^2)^2=a^6-6a^4b^2+9a^2b^4=121$，$(b^3-3a^2b)^2=b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=4$，兩式相加得

$a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=(a^2+b^2)^3=125$，因此 $a^2+b^2=5$

[解法二]

考慮複數 $z=a+bi$，則 $z^3=(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i=11-2i$

所以 $|z^3|^2=|z|^6=11^2+(-2)^2=125$，因此 $a^2+b^2=|z|^2=5$

10. 平面上有 108 個三角形，最多可以將平面分成多少個區域？

答案：34670

解：設平面上有 n 個三角形時，最多可以將平面分成 a_n 個 區域，則 $a_1=2$，$a_2=8$，$a_3=20$，

而 $a_n=a_{n-1}+6(n-1)$，可解遞迴關係式得 $a_n=3n^2-3n+2$，因此，$a_{108}=34670$。

11. 空間中，已知三個半徑為 1 的球互相外切，且每個球都同時與另兩個半徑為 r 的球外切，若這兩個半徑為 r 的球也互相外切，求 r 的值.

答案：$\frac{1}{6}$

解：設 O_1,O_2,O_3 分別是半徑為 1 的三個球的球心，I_1,I_2 分別是半徑為 r 的兩個球的球心，則兩個半徑為 r 的球相切之處即為 $\triangle O_1O_2O_3$ 的中心 G，因為 $\overline{I_1G}=r$，$\overline{I_1O_1}=r+1$，$\overline{GO_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，且 $\angle I_1GO_1=90^\circ$，由畢氏定理

$r^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=(r+1)^2$，解得 $r=\frac{1}{6}$

12. 若實數 θ 滿足 $\log_{\cos\theta}32=\log_{(\cos\theta+2\sin\theta)}108=\log_{\sin\theta}48$，求 $\cot\theta$ 的值.

答案：無解(原題目設計有誤)

13. 已知 x, y 為正實數，且 $\frac{8}{x^2}+\frac{1}{y}=1$，求 $x+y$ 的最小值.

答案：6

解：$x+y=x\cdot(\frac{8}{x^2}+\frac{1}{y})+y=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y\geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot y}=6$，所以 $x+y$ 的最小值為 6.

14. 設 p 為大於 2 的質數，且 $p\mid 2019^8+1$，求 p 的最小值.

答案：97

解：由題意知 $2019^8\equiv -1(mod p)$，故 $2019^{16}\equiv 1(mod p)$，所以 $\varphi(p)\mid 16$ 或 $16\mid\varphi(p)$，若 $\varphi(p)\mid 16$，則 $p=3$ 或 5 (不合)，若 $16\mid\varphi(p)=p-1$，$p=17,97,\cdots$，代入驗算可知 $2019^8\equiv 1(mod 17)$，不合。而 $2019^8\equiv -1(mod 97)$，因此，p 的最小值為 97

15. 投擲三顆公正骰子，求這三顆骰子中有兩顆骰子出現的點數和等於 7 的機率.

答案：$\frac{5}{12}$

解：$7=1+6=2+5=3+4$，若三顆骰子中有兩顆為 1 點，6 點，第三顆若為 1 或 6 ，則有 6 種可能；第三顆若為 2，3，4，5 之一，則有 $4\cdot 3!=24$ 種，所以三顆骰子中有兩顆為 1 點，6 點，且滿足題意的可能有 $24+6=30$ 種

同理，三顆骰子中有兩顆為 2 點，5 點或三顆骰子中有兩顆為 3 點，4 點，也各有 30 種，因此所求機率為 $\frac{30\cdot 3}{216}=\frac{5}{12}$

二、計算證明題

1. 若 a, b, c 為有理數，且 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 也是有理數，證明：$\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 也是有理數.

證明：設 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=r\in\mathbb{Q}$，則 $(r-\sqrt{a})^2=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$，展開得

$r^2-2r\sqrt{a}+a=b+c+2\sqrt{bc}$，所以 $\sqrt{bc}=\frac{r^2+a-b-c}{2}-r\sqrt{a}$，令 $l=\frac{r^2+a-b-c}{2}\in\mathbb{Q}$

則 $bc=(l-r\sqrt{a})^2=l^2-2lr\sqrt{a}+r^2a$，所以 $\sqrt{a}=\frac{-bc+l^2+r^2a}{2lr}$，而 a, b, c, r, l 皆是有理數，

因此，$\sqrt{a}$ 是有理數，同理可得 $\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 為有理數.

2. 設 n 為正整數，證明：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>\frac{2n}{3n+2}$

證明：
$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}&=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

由柯西不等式

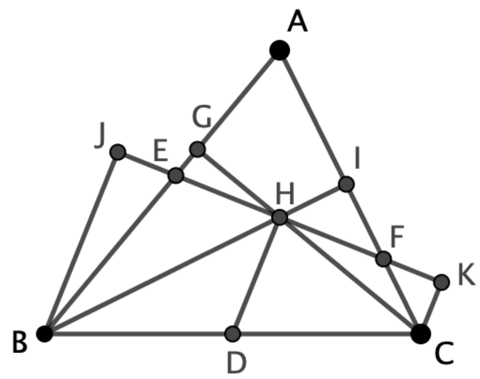
$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\left((n+1)+(n+2)+\cdots+(n+n)\right)>n^2$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\cdot\frac{n\cdot(3n+2)}{2} > n^2$

因此，$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{2n}{3n+2}$。

3. 如右圖，設 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，D 為 $\overline{BC}$ 中點，過 H 且垂直 $\overline{DH}$ 的直線分別交 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 於 E, F 兩點，

求證：H 為 $\overline{EF}$ 的中點



證明：延長 $\overline{BH}$、$\overline{CH}$ 分別交 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 於 I, G，B, C 在直線 EF 上的垂足分別為 J, K

因為 $\overline{BJ}//\overline{DH}//\overline{CK}$ 且 D 為 $\overline{BC}$ 中點，所以 $\overline{HJ}=\overline{HK}$

因為 $\angle CGE=\angle CKE=90^{\circ}$，所以 C, K, G, E 四點共圓，

由圓冪定理，$\overline{EH}\times\overline{HK}=\overline{GH}\times\overline{HC}$

因為 $\angle BJF=\angle BIF=90^{\circ}$，所以 B, J, I, F 四點共圓，

由圓冪定理，$\overline{JH}\times\overline{HF}=\overline{BH}\times\overline{HI}$

因為 $\angle BGC=\angle BIC=90^{\circ}$，所以 B, G, I, C 四點共圓，

由圓冪定理，$\overline{GH}\times\overline{HC}=\overline{BH}\times\overline{HI}$

故 $\overline{EH}\times\overline{HK}=\overline{JH}\times\overline{HF}$，又 $\overline{HJ}=\overline{HK}$，因此，$\overline{HE}=\overline{HF}$，即 H 為 $\overline{EF}$ 的中點