

填充題：共 12 題（每題 10 分）

1. 已知  $n \in \mathbb{N}$ ，定義函數  $f(n)$  表示  $n$  的各位數的數字和，

例如： $f(8910) = 8 + 9 + 1 + 0 = 18$ ，若  $n$  是二位數，試問  $\frac{n}{f(n)}$  的最小值是多少？

$\frac{19}{10}$

2. 有一份考卷，25 題填充題，評分標準：答對一題得 6 分，未作答得 2.5 分，答錯得 0 分

根據這個標準，總分會介於 0~150 分，在這之間，有些分數只有唯一方式獲得（例如：得分 150 分，一定是答對 25 題、未作答 0 題、答錯 0 題），有些總分恰有兩種方式獲得，今已知有三個分數恰有三種方式獲得，試問這三個分數的總和是？

188.5

3.  $\square ABC$  為銳角三角形， $\angle ABC = 45^\circ$ 、 $D$  在  $\overline{BC}$  上、 $2\overline{BD} = \overline{CD}$ 、 $\angle DAB = 15^\circ$   
試求  $\angle ACB$

$75^\circ$

4. 已知函數  $f(x)$  滿足  $2f(x) + x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^3 - x^2 + 4x + 3}{x+1}$ ，又  $g(x) = \frac{5}{x+1}$ ，

試求  $f(x) + g(x)$  的最小值

$\frac{15}{4}$

5. 解方程式  $[x] + [3x] = 5$  ( $[x]$ : 不超過  $x$  的最大整數)

$\frac{4}{3} \leq x < \frac{5}{3}$

6. 已知  $\square ABC$  為等腰三角形，過其某個頂點作一條直線，將  $\square ABC$  分成兩個等腰三角形，試問  $\square ABC$  的三個內角度數可能是幾度？

$(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ 、 $(108^\circ, 36^\circ, 36^\circ)$ 、 $(36^\circ, 72^\circ, 72^\circ)$ 、 $(25\frac{5}{7}^\circ, 77\frac{1}{7}^\circ, 77\frac{1}{7}^\circ)$

7. 已知  $b > 0$ ，令  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$ ，若  $f(x)$  的定義域與值域相同，試求  $a$

0 or -4

8. 已知  $a \in \mathbb{R}$ ，設  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leq 0 \\ 3x - 2 & x > 0 \end{cases}$ ，若  $|f(x)| \geq ax$  在  $-1 \leq x \leq 1$  時恆成立，

試求  $a$  的範圍

$-1 \leq a \leq 0$

9. 已知三角形中有一角是  $(180 - n)$  度，且其最大角和最小角的角度差為  $24^\circ$ ，  
試求出  $n$  的範圍

$104 \leq n \leq 136$

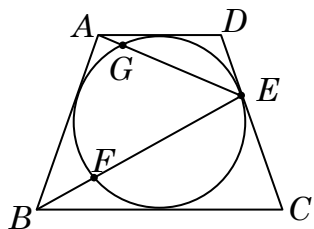
10. 將三個半徑等於 1 的球放置在一個平面上，彼此外切，再將一個半徑為 2 的球放在這三個球的上面，  
試問大球的最高點距離平面多高？

$3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$

11. 已知  $f(x)$  為二次函數，令  $g(x) = -f(100 - x)$ 、且  $y = g(x)$  的圖形包含  $y = f(x)$  的頂點。若此兩圖形與  $x$  軸各有兩個交點，這四個交點的  $x$  坐標為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ ，  
其中  $a < b < c < d$ 、 $c - b = 150$ ，試求  $d - a$  之值

$450 + 300\sqrt{2}$

12. 如圖， $ABCD$  為等腰梯形，作其內切圓， $E$  為切點，試求  $\frac{\overline{AE}}{\overline{AG}} + \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}}$  之值



10

計算題：共三題（每題 10 分）

1. 從貨輪上卸下若干隻箱子，所有箱子總重量為 10 噸，每個箱子的重量不超過 1 噸，為了保證能把這些箱子一次運走，請問至少需要多少輛載重 3 噸的貨車？

設每輛車實際載重為  $x$ ，因為每只箱子重量不超過 1 噸，則每輛車可運走貨物不少於 2 噸，否則可以再放一隻箱子上去。因此根據箱子重量不同，有  $2 < x \leq 3$ 。若有  $a$  輛車，則  $2a < ax \leq 3a$ ， $ax$  為總載重量。無論箱子重量怎樣配置，若要一次運走貨物，總載重量下限應大於 10 噸，即  $2a = 10$ ，解得  $a = 5$  輛。當有 4 輛車時，若有 13 只箱子，平均每 4 只箱子的重量超過 3 噸，故不能用 4 輛車一次運走。因此至少要 5 輛車才能把這些箱子一次運走。

5

2. 有 10 個人到文具店買原子筆，

已知 (1) 每人都買了 3 支原子筆

(2) 任意兩人所買的原子筆都至少有一支相同，

試問，購買人數最多的那種原子筆，最少有幾人購買？

5

3. 所謂的循環賽指的是每個參賽隊伍都與其他隊各比賽一場。

去年學校舉辦籃球循環賽，規定勝一場得積分 2 分、平手得積分 1 分、輸一場得積分 0 分。若已知僅有一個隊伍積分最多，但它同時是勝場最少的唯一隊伍。

試問：(1) 至少有幾個隊伍參賽

(2) 請舉出一個符合的例子

6

	A	B	C	D	E	F	分
A		1	1	1	1	2	6
B	1		2	0	0	2	5
C	1	0		0	2	2	5
D	1	2	2		0	0	5
E	1	2	0	2		0	5
F	0	0	0	2	2		4