高雄中學 109 學年度數學科學科能力競賽初試第二階段試題

(請將作答過程填寫在空白答案卷上，並標示清楚題號)

計算證明題：（每題 10 分，共計 120 分）

1. 已知在銳角三角形ΔABC中，$cos^2A+cos^2B+2sinAsinBcosC=\frac{34}{25}$，

$$cos^2B+cos^2C+2sinBsinCcosA=\frac{14}{9}，$$

則$cos^2C+cos^2A+2sinCsinAcosB=?$

答案：$\frac{334-48\sqrt{5}}{225}$

簡答：不妨設三角形ΔABC的外接圓半徑為 1，利用餘弦定理$c^2=a^2+b^2-2abcosC$，得到$sin^2C=sin^2A+sin^2B-2sinAsinBcosC$，所以$cos^2A+cos^2B+2sinAsinBcosC=\frac{34}{25}=2-sin^2C$，$sinC=\frac{4}{5}$，$cosC=\frac{3}{5}$.同理，$sinA=\frac{2}{3}$，$cosA=\frac{\sqrt{5}}{3}$，又$sin^2B=sin^2(A+C)=(sinAcosC+cosAsinC)^2=\frac{116+48\sqrt{5}}{225}$，所以$cos^2C+cos^2A+2sinCsinAcosB=2-sin^2B=\frac{334-48\sqrt{5}}{225}$.

2. 已知空間三向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，兩兩的夾角皆為$60°$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=4$，若向量$\vec{u}$，$\vec{v}$滿足$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{a})=\vec{u}\cdot\vec{b}$，$\vec{v}\cdot(\vec{v}+\vec{a})=\vec{v}\cdot\vec{c}$，則$|\vec{u}-\vec{v}|$的最大值為多少？

答案：$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}$

簡答：利用餘弦定理可得$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}-\vec{c}|=2\sqrt{3}$，$|\vec{c}-\vec{a}|=\sqrt{13}$，又$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{a})=\vec{u}\cdot\vec{b}$，$|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，即$\left|\vec{u}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，同理，$\left|\vec{v}+\frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}\right|=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{c}|=\frac{\sqrt{13}}{2}$，所以

$$|\vec{u}-\vec{v}|=\left|\left(\vec{u}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)-\left(\vec{v}+\frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}\right)+\frac{\vec{b}-\vec{c}}{2}\right|\le\left|\vec{u}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right|+\left|\vec{v}+\frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}\right|+\left|\frac{\vec{b}-\vec{c}}{2}\right|=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}.$$

3. 試求方程式$x^2+615=2^y$的全部正整數解。

解答：$(x,y)=(59,12)$

簡答：對方程式兩邊取模 3，可得$x^2\equiv2^y(mod3)$，因為2^y不能被 3 整除，所以x^2也不能被 3 整除，所以$x^2\equiv1(mod3)$，故$2^y\equiv1(mod3)$，故y為偶數，可設$y=2m(m\in N)$，則有$(2^m-x)(2^m+x)=615=3\times5\times41$，解得$\begin{cases}2^m-x=5\\2^m+x=123\end{cases}$，即$\begin{cases}x=59\\y=12\end{cases}$.

4. 方程式$\sin\pi x = [\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]]$，試求在區間$[0，2\pi]$內的所有實根之和。其中$[x]$

表示不大於x的最大整數

解答：12

簡答：設$\frac{x}{2}=\left[\frac{x}{2}\right]+\{\frac{x}{2}\}$，其中$\{\frac{x}{2}\}$表示小數部分，$0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<1$，所以原式為$\sin\pi x=[\{\frac{x}{2}\}+\frac{1}{2}]$，

(1) 若$0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<\frac{1}{2}$，則$\sin\pi x=0$，$\pi x=k\pi(k\in Z)$，所以$x\in$

$\{0，1，2，3，4，5，6\}$，檢驗得$x=0，2，4，6$

(2) 若$\frac{1}{2}\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<1$，則$\sin\pi x=1$，$\pi x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，所以$x=2k+\frac{1}{2}(k\in Z)$，得$x\in\{\frac{1}{2}，$

$\frac{5}{2}，\frac{9}{2}\}$，檢驗得皆不合，所以解為0，2，4，6，和為 12

5. 在一個十進位制正整數中，如果它含有偶數(包括零)個數字 8，則稱它為“財富數”，否則稱它為”非 財富數”，那麼長度(位數)不超過 n(n 為正整數)的所有“財富數”的個數為多少個？

解答：$\frac{1}{2}(8^n+10^n)-1$

簡答：設長度為 n 的”財富數”個數為a_n，則$a_1=8$，令$n\ge2$，對於a_n在長度為 n-1 的”非財富數”的末尾添加數字 8，就變成長度為 n 的“財富數” ，且這樣的”財富數”有$9\times10^{n-2}-a_{n-1}$個，在長度為 n-1 的“財富數”的末尾添加一個非 8 的數字，就變成長度為 n 的“財富數” ，且這樣的財富數有$9a_{n-1}$個，所以 $a_n=9\times10^{n-2}-a_{n-1}+9a_{n-1}$，求得$a_n=\frac{7}{16}\times8^n+\frac{9}{20}\times10^n$，

則$\sum_{k=1}^{n}(\frac{7}{16}\times8^k+\frac{9}{20}\times10^k)=\frac{1}{2}(8^n+10^n)-1$即為所求。

6. 欲將實數線上所有座標為整數的點塗上顏色，規定相距 3 單位的任兩個整數點必須是不同色，而且相距 4 單位的任兩個整數點也是不同色。試問：
(1)僅用兩種顏色是否可以完成，若可以，請證明之，不可以，請舉反例。
(2)僅用 3 種顏色是否可以完成，若可以，請證明之，不可以，請舉反例。

答案：(1)否(2)可

簡答：(1)否。依序在 0，3，6，9，12，8，4，0 的塗色情形，可知不能用兩種顏色。

(2)可。設a_i代表整數點i所塗的顏色，則依$a_i=\begin{cases}\text{第一色，}i\equiv1,2,3(mod\ 9)\\\text{第二色，}i\equiv4,5,6(mod\ 9)\text{的塗色，三種顏色}\\\text{第三色，}i\equiv7,8,9(mod\ 9)\end{cases}$

即可完成。

7. 試證明不等式：$1<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[2020]{2020}}}}<2.$

簡答：利用數學歸納法，設$a_1=\sqrt[2020]{2020}$，可知 $1<a_1<2$，

對$2\le k\le 2019$，設$a_k=\sqrt[2020-k+1]{2020-k+1+a_{k-1}}$，

可知$a_{2019}=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[2020]{2020}}}}$，

假設$1<a_{k-1}<2$，其中$2\le k\le 2019$，由$2020-k+1+a_{k-1}>2020-k+1+1>1$，
可知 $1<a_k$，另外，利用不等式$n+2\le 2^n$，當$n\ge 2$ 時，可得到
$2020-k+1+a_{k-1}<(2020-k+1)+2\le 2^{2020-k+1}$，
即可知$a_k<2$，故有當$1<a_k<2$，當 $1\le k\le 2019$，

所以$1<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[2020]{2020}}}}<2.$

8. 在數列$\{a_n\}$中，對任意的k，$m\in N$，a_k，$a_{k+1}\cdots$，a_{k+m}，叫做該數列的長度為$m+1$的一個"片斷"，$a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+m}$叫做該片斷的和，$m+1$叫做該片斷的長度，對於數列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，試證明：該數列任何長度不小於 2 的片斷的和都不會是整數。

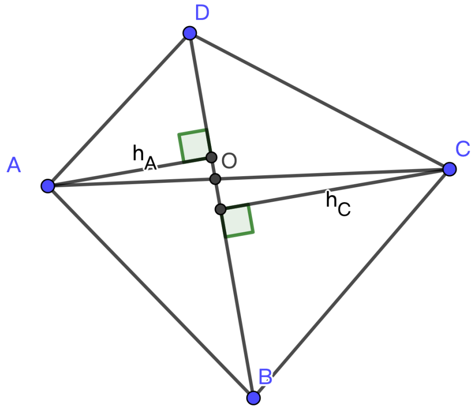
簡答：利用反證法：假設存在m，$n\in N$，使得$\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}\in N$，設$m+i=a_i\cdot 2^{\alpha_i}$，$(i=0$，$1$，$2$，$\cdots$，$n)$，其中$a_i$是正奇數，$\alpha_i\in N$，取$A=a_o\cdot a_1\cdot\cdots\cdot a_n$，$A$為正奇數，$\alpha=\max\{\alpha_0$，$\alpha_1\cdots$，$\alpha_n\}$，因為$\alpha_0$，$\alpha_1$這兩個數不可能都是零(分母一奇一偶)，所以$\alpha\in N$.

考慮$A\cdot 2^{\alpha-1}\in N$，所以$A\cdot 2^{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\in N$，則$\alpha_0$，$\alpha_1\cdots$，$\alpha_n$中必有最大值且只有一個，若最大值有兩個，假設存在$i\ne j$，$\alpha_i=\alpha_j=\alpha$(設 $0\le i<j\le n$)，則$m+i=a_i\cdot 2^{\alpha}$，$m+i=a_j\cdot 2^{\alpha}$，因為$i<j$，所以$\alpha_i<\alpha_j$.
在兩個不同的奇數α_i，α_j中必定存在偶數2k，即$\alpha_i<2k<\alpha_j(0\le i<j\le n)$，所以$m+i=a_i\cdot 2^{\alpha}<2k\cdot 2^{\alpha}<a_j\cdot 2^{\alpha}=m+j$，$2k\cdot 2^{\alpha}=k\cdot 2^{\alpha+1}$會是該數列上述片斷中的一項分母，把這個分母寫成$a\cdot 2^{\beta}$($a$為正奇數，$\beta\in N$)時，2 的冪指數至少是$\alpha+1$，與$\alpha$
初始的含義相矛盾，矛盾表示α_0，$\alpha_1\cdots$，α_n中必有最大值且只有一個，是α，對應的分母是$a_k\cdot 2^{\alpha}$，則考慮$\frac{A\cdot 2^{\alpha-1}}{a_k\cdot 2^{\alpha}}=\frac{\frac{A}{a_k}}{2}$，由於$\frac{A}{a_k}$是正奇數，所以$\frac{A\cdot 2^{\alpha-1}}{a_k\cdot 2^{\alpha}}\notin N$，除了這一項外，其餘 n 項$\frac{A\cdot 2^{\alpha-1}}{a_i\cdot 2^{\alpha_i}}\in N$，

所以$A\cdot 2^{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\notin N$，此為矛盾，故該數列任何長度不小於 2 的片斷的和都不會是整數。

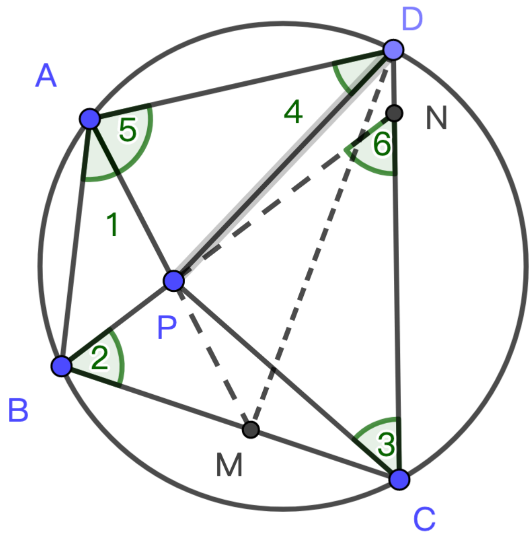
9. 給定一個凸四邊形ABCD，ΔBCD，ΔCDA，ΔDAB，ΔABC的面積分別為S_A，S_B，S_C，S_D，試在四邊形ABCD所在的平面上找出所有的點P，滿足$S_A\overrightarrow{PA}+S_B\overrightarrow{PB}+S_C\overrightarrow{PC}+S_D\overrightarrow{PD}=\vec{0}$.

簡答：



設凸四邊形ABCD的面積為$S=S_A+S_C=S_B+S_D$，令對角線$\overline{AC}$，$\overline{BD}$交於點O，點A，C到直線$\overline{BD}$的距離分別為h_A，h_C，於是$\angle AOB=\angle COD$，得到$\frac{h_A}{\overline{OA}}=\frac{h_C}{\overline{OC}}$，所以$h_A\overrightarrow{OC}+h_C\overrightarrow{OA}=\vec{0}$，又$2S_A=\overline{BD}\cdot h_C$，$2S_C=\overline{BD}\cdot h_A$，代入可得$S_C\overrightarrow{OC}+S_A\overrightarrow{OA}=\vec{0}$，因此在平面上任一點$P$，$S_A\overrightarrow{PA}+S_C\overrightarrow{PC}=-(S_A+S_C)\overrightarrow{OP}=-S\cdot\overrightarrow{OP}$，同理，$S_B\overrightarrow{PB}+S_D\overrightarrow{PD}=-(S_B+S_D)\overrightarrow{OP}=-S\cdot\overrightarrow{OP}$，所以$S_A\overrightarrow{PA}+S_C\overrightarrow{PC}+S_B\overrightarrow{PB}+S_D\overrightarrow{PD}=-2S\cdot\overrightarrow{OP}=\vec{0}$，又面積$S>0$，所以$P=O$，取 P 為四邊形兩對角線之交點。

10. 已知圓內接四邊形ABCD內部存在一點P，使得$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCD=\angle PDA$，試證明：$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}$.



簡答：如圖，

延長$\overline{AP}$，$\overline{BP}$交$\overline{BC}$，$\overline{CD}$於點M，N，由$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$知$\angle DPM=\angle 4+\angle DAP=\angle 1+\angle DAP=\angle DAB=180°-\angle DCM$，所以$D$，$P$，$M$，$C$四點共圓，同理，$A$，$D$，$N$，$P$四點共圓，有$\Delta DPC\sim\Delta MBA$，($\angle PDC=\angle BMA$，$\angle 3=\angle 1$)得到$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AM}\cdot\overline{CP}$，同理，有$\Delta DAP\sim\Delta BNC$，($\angle DAP=\angle 5=\angle BNC=\angle 6$，$\angle 4=\angle 2$)得到$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{BN}\cdot\overline{DP}$，接著只要證明：$\overline{AM}\cdot\overline{CP}=\overline{BN}\cdot\overline{DP}$，等同於$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}\Leftrightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$.由$\angle 5=\angle 6$及$\angle 2=\angle 3=\angle AMD$，有$\Delta NBC\sim\Delta AMD$，所以$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{NC}}$. 由$\angle 5=\angle 6$及$\angle 3=\angle 4$，

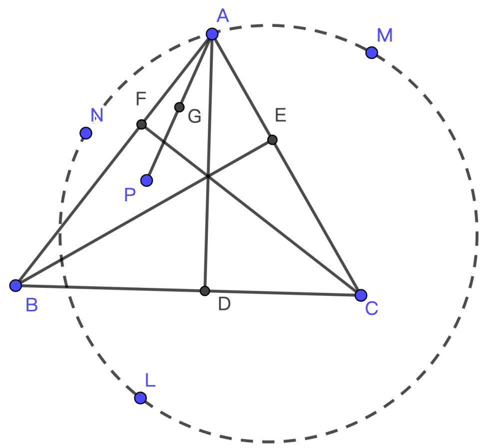
有$\Delta APD\sim\Delta NPC$，所以$\frac{\overline{AD}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$.故$\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$，即$\overline{AM}\cdot\overline{CP}=\overline{BN}\cdot\overline{DP}$，得到$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{BC}\cdot\overline{AD}$.

11. 設a，b，c為實數，方程式$x^2-(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$，有一根形如α＋βi (α > 0，β ≠ 0，$\beta\in R$)，證明：(1) a，b，c皆為正實數。(2)存在一個以$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$為邊長的三角形。

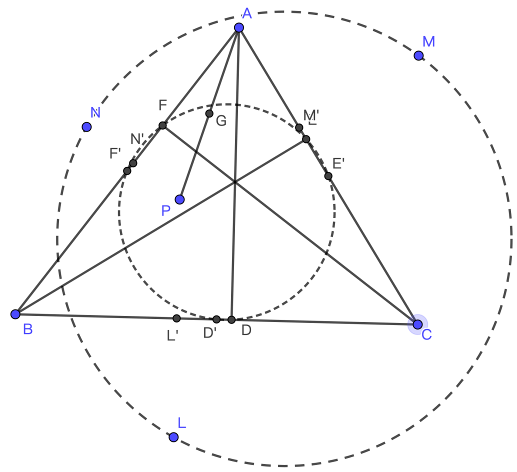
簡答：(1)由虛根成對定理，知道$\alpha-\beta i$亦為方程式的根，$\begin{cases} a+b+c=2\alpha \\ ab+bc+ca=\alpha^2+\beta^2 \end{cases}$，不妨設$a\geq b\geq c$，只需證明$c>0$即可，則$c=2\alpha-(a+b)$，令$a+b=u$，則$\alpha^2+\beta^2=ab+u(2\alpha-u)\leq \frac{1}{4}u^2+u(2\alpha-u)\Rightarrow -\frac{3}{4}u^2+2\alpha u>\alpha^2$，解出$\frac{2}{3}\alpha<u<2\alpha$，得到$c=2\alpha-(a+b)>0$，所以a，b，c皆為正數。

(2)根據前面的假設，我們只需證明$\sqrt{a}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$，由條件知道$a(b+c)+bc=\alpha^2+\beta^2>\alpha^2=(\frac{a+b+c}{2})^2$，即$(a+b+c)^2-4a(b+c)<4bc$，得到$a^2-2(b+c)a+(b-c)^2<0$，由根的公式解知$a<(b+c)+\sqrt{(b+c)^2-(b-c)^2}=b+c+2\sqrt{bc}=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$，得到$\sqrt{a}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$，所以存在一個以$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$為邊長的三角形。

12. 如圖，$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$是ΔABC的三條高，P為ΔABC內部一點，P關於$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$的對稱點分別為L，M，N，$\overline{AP}$的中點為G，試證明：若A，M，L，N四點共圓，則D，E，G，F四點共圓。



簡答：



設$\overline{PL}$，$\overline{PM}$，$\overline{PN}$的中點分別為L'，M$'$，N'，則$\angle MLN=\angle M'L'N'$，因此B，L'，P，N'四點共圓，C，L'，P，M'四點共圓，我們有$\angle M'L'P=\angle ACP$，$\angle PL'N'=\angle PBA$，這樣有$\angle MLN=\angle M'L'N'=\angle M'L'P+\angle PL'N'=\angle ACP+\angle PBA$，得到$\angle MAN=2\angle BAC$，由$A$，$L$，$M$，$N$四點共圓可得$\angle MLN+\angle MAN=180°$，因此$\angle ACP+\angle PBA+2\angle BAC=180°$，可得$\angle BPC+\angle BAC=180°$。

設$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$的中點分別為D'，E$'$，F'，則$\overline{F'G}//\overline{BP}$，$\overline{E'G}//\overline{CP}$，因此$\angle BPC=\angle F'GE'$. 又$\angle E'D'F'=\angle BAC$(平行四邊形 AE'D'F'對角相等)，所以$\angle F'GE'+\angle E'D'F'=180°$，這表示$D'$，$E'$，$F'$，$G$四點共圓，事實上，$D'$，$E'$，$F'$所在的圓就是$\Delta ABC$的九點圓，$D$，$E$，$F$也在此圓上，因此$D$，$E$，$G$，$F$四點共圓。

高雄中學 109 學年度數學科學科能力競賽初試第二階段試題

注意：請將作答過程填寫在空白答案卷上，並標示清楚題號。

計算證明題：（每題 10 分，共計 120 分）

1. 已知在銳角三角形ΔABC中，$cos^2A+cos^2B+2sinAsinBcosC=\frac{34}{25}$，

$$cos^2B+cos^2C+2sinBsinCcosA=\frac{14}{9}，$$

$$則cos^2C+cos^2A+2sinCsinAcosB=?$$

2. 已知空間向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$兩兩的夾角為$60°$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=4$，若向量$\vec{u}$，$\vec{v}$滿足 $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{a})=\vec{u}\cdot\vec{b}$，$\vec{v}\cdot(\vec{v}+\vec{a})=\vec{v}\cdot\vec{c}$，則$|\vec{u}-\vec{v}|$的最大值為多少？

3. 試求方程式$x^2+615=2^y$的全部正整數解。

4. 方程式$\sin\pi x=[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{2}]$，求在區間$[0，2\pi]$內的所有實根之和。其中$[x]$

   表示不大於x的最大整數。

5. 在一個十進位制正整數中，如果它含有偶數(包括零)個數字 8，則稱它為“財富數”，否則稱它為”非財富數”，那麼長度(位數)不超過 n(n 為正整數)的所有“財富數”的個數為多少？

6. 試證明不等式：$1<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4+\cdots+\sqrt[2020]{2020}}}}<2.$

7. 欲將實數線上的所有座標為整數的點塗上顏色，規定相距 3 單位的任兩個整數點必須是不同色，而且相距 4 單位的任兩個整數點也是不同色。試問：

   (1)僅用兩種顏色是否可以完成，若可以，請證明之，不可以，請舉反例。

   (2)僅用 3 種顏色是否可以完成，若可以，請證明之，不可以，請舉反例。。

8. 在數列$\{a_n\}$中，對任意的k，$m\in N$，a_k，$a_{k+1}\cdots$，a_{k+m}，叫做該數列的長度為$m+1$的一個“片斷”，$a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+m}$叫做該片斷的和，$m+1$叫做該片斷的長度，對於數列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，試

   證明：該數列任何長度不小於 2 的片斷的和都不會是整數。

9. 給定一個凸四邊形ABCD，ΔBCD，ΔCDA，ΔDAB，ΔABC的面積分別為S_A，S_B，S_C，S_D，試在四邊形ABCD所在的平面上找出所有的點P，滿足$S_A\overrightarrow{PA}+S_B\overrightarrow{PB}+S_C\overrightarrow{PC}+S_D\overrightarrow{PD}=\vec{0}.$

10. 圓內接四邊形ABCD中存在一點P，使得$\angle PAB = \angle \mathrm{P}BC = \angle \mathrm{P}CD = \angle \mathrm{PD}A$，
試證明：$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

11. 設a，b，c為實數，方程式$x^2-(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$，有一根形如α＋βi($\alpha > 0$，$\beta \neq 0$，$\beta \in R$)，證明：(1) a，b，c皆為正實數。(2)存在一個以$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$為邊長的三角形。

12. 如圖，$\overline{AD}$，$\overline{BE}$，$\overline{CF}$是ΔABC的三條高，P為ΔABC內部一點，P關於$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$的對稱點分別為L，M，N，$\overline{AP}$的中點為G，試證明：若A，M，L，N四點共圓，則D，E，G，F四點共圓。