

110 學年度數學科校內學科競賽初試題目卷

A 部分：填充題，每題 10 分

1. 若 k 為一實數，方程式 $x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + k = 0$ 的解當中，其中兩個相加為 1，試求此方程式的所有解。
2. 若 $x > 1, y > 1$ ，滿足 $(\log x)^2 + (\log y)^2 = \log(x^2) + \log(y^2)$ ，試求 $x^{\log y}$ 的最大值。
3. a_1, a_2, a_3 為 0~9 的整數，其中 $a_1 \neq 0$ ，對於三位數 $a_1a_2a_3$ ，定義 $n(a_1a_2a_3) = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3|$ 。試問：滿足 $n(a_1a_2a_3) = 2$ 的三位數 $a_1a_2a_3$ 有幾個？
4. 全班有 N 個人，有一部分的學生穿著白色運動服，其餘學生全部穿著黑色運動服。如果在全班學生中選出 3 人，穿著白色和黑色運動服的學生皆至少一人的方法數為 25 種。試問：全班人數 N 為多少？
5. $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，試求解方程式 $\left[\frac{25x-2}{4} \right] = \frac{13x+4}{3}$ 。
6. 方程式 $x^3 + Ax + 10 = 0$ 與 $x^3 + Bx^2 + 50 = 0$ 有兩個共同根，試求這兩個根的乘積。
7. 將 1~8 放在一個 3×3 的九宮格中，其中一格留空。如果：任何一對相鄰方格中，要不其中一格為空格，要不兩數之差不超過 2，則此種擺法成為「緊密」的擺法。所有經過反射和旋轉的擺法皆認定為不同的擺法。試問：總共有幾種「緊密」的擺法？
8. 在邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 中，點 E 在 \overline{AB} 上，點 F 在 \overline{BC} 上，且 $\angle BCE = \angle BAF = 30^\circ$ ，若 \overline{CE} 和 \overline{AF} 相交於點 G ，試求 $\triangle AGE$ 和 $\triangle CGF$ 的內心距離。
9. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_{2021} \in (0, 1)$ ，且 $a_1 = a_{2021}$ ，試求 $\sum_{i=1}^{2020} \sqrt[110]{a_i(1-a_{i+1})}$ 的最大值。

B 部分：計算證明題，每題 10 分

說明：此部分需要詳細寫下計算過程和推論

10. a, b, c 為正實數，滿足 $a + b + c = 1$ ，試求 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}$ 的最小值。
11. 假設 $x \neq \frac{n\pi}{2}$ ，其中 n 為任意整數，試求 $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 的最小值。
12. 設 D 為 $\triangle ABC$ 的邊 \overline{BC} 上一點，點 E 、 F 分別為 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的重心，連接 \overline{EF} 交 \overline{AD} 於點 G ，
試求 $\overline{DG} : \overline{GA}$