110 學年度雄中數學科詳解

1. 因為方程式有其中兩根之和為1，故有因式x^2-x+h，利用長除法可以得到，$h=-1,k=3$，以及原式$=\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-3\right)=0$。因此各解為$\pm\sqrt{3}$、$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

2. 因為$\left(\log x-1\right)^2+\left(\log y-1\right)^2=2$，令$\log x=1+\sqrt{2}\cos t$、$\log y=1+\sqrt{2}\sin t$，$k=x^{\log y}$，則

   $\log k=1+\sqrt{2}\left(\sin t+\cos t\right)+2\sin t\cos t=1+\sqrt{2}A-1+A^2=\left(A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$，其中$A=\sin t+\cos t$，因此當$A=\sqrt{2}$時，$k=x^{\log y}$有最大值$4$，所以$\max(x^{\log y})=10000$。

3. 狀況 1：$|a_1-a_2|=2$、$|a_2-a_3|=0$，此有 15 種。
   狀況 2：$|a_1-a_2|=0$、$|a_2-a_3|=2$，此有 15 種。
   狀況 3：$|a_1-a_2|=1$、$|a_2-a_3|=1$，$a_1=a_3$，此有 16 種。
   狀況 4：$|a_1-a_2|=1$、$|a_2-a_3|=1$，$a_1\neq a_3$，此有 16 種。

4. 假設白色有n人，黑色有m人，則$C_1^nC_2^m+C_2^nC_1^m=25\Leftrightarrow nm\left(n+m-2\right)=50$。因為$n,m\in\mathbb{N}$，$n,m\geq 2$，因數分析可知：$\left(n,m\right)=\left(2,5\right)or\left(5,2\right)$，故$N=7$。

5. 令$y=\dfrac{13x+4}{3},y\in\mathbb{Z}$，則$x=\dfrac{3y-4}{13}$，故

   $\left[\dfrac{25\cdot\dfrac{3y-4}{13}-2}{4}\right]=y\Leftrightarrow\left[\dfrac{75y-126}{52}\right]=y\Leftrightarrow y\leq\dfrac{75y-126}{52}<y+1\Leftrightarrow\dfrac{126}{23}<y<\dfrac{178}{23}$，因此$y=6,7$，即$x=\dfrac{14}{13}$或$x=\dfrac{17}{13}$。

6. 假設第一道方程式的解為p,q,r、第二道方程式的解為p,q,s，則三根乘積：

   $\begin{cases}pqr=-10\\pqs=-50\end{cases}\Rightarrow s=5r$，以外三根和：$\begin{cases}p+q+r=0\\p+q+s=-B\end{cases}$，可得$\begin{cases}r=-\dfrac{B}{4}\\s=-\dfrac{5B}{4}\end{cases}$，再由第二式的兩兩乘積和

   可得$pq+ps+qs=pq+s(p+q)=0\Rightarrow pq=\dfrac{5B}{4}(p+q)=-\dfrac{5B}{4}r=\dfrac{5}{16}B^2$，因為$pqr=-10$，代入可得$\dfrac{5}{16}B^2\left(-\dfrac{B}{4}\right)=-10\Rightarrow B=\sqrt[3]{128}=4\cdot\sqrt[3]{2}$，是故$pq=5\cdot\sqrt[3]{4}$。

7. 如果空格放在正中央，則必為以下排法，及其旋轉與對稱，共有 16 種擺法。

2	1	3
4		5
6	8	7

如果中間不是空格，也肯定不是 1，因為與 1 的差不超過 2 者僅有兩數。假設中間數為 n，如果 1 與之相鄰，如圖：

	1	w
x	n	z
	y	

則 1 的旁邊必有一個為空格，且 $\{n,w\}=\{2,3\}$，但如此一來，x,y,z 中必有一數與 n 的差超過 2，矛盾。因此，我們得知，如果中間不是空格，1 肯定落在角落處。再來，考慮 1 的相鄰兩格都不是空格，則必填入 2,3，如圖：

1	2	
3	n	r
p	q	

在此情況下，可以推論得到 n=4，p=5。但如此以來 q,r 必有其中一數與 n 的距離超過 2，又矛盾。因此，1 的旁邊必定有一空格。由於 8 和 1 個性質相同，所以所有可能情況如下，共 16 種：

1		8
2/3	4/5	6/7
3/2	5/4	7/6

綜上分析，全部共有 32 種緊密擺法。

8. 在 ΔAEG 中，$\angle EGA=\angle BEC-\angle BAF=(90^\circ-\angle BCE)=\angle BAF=30^\circ=\angle GAE$，故 $\overline{AE}=\overline{GE}$，即

ΔAEG 為等腰三角形。若令 I 為 ΔAEG 的內心，則所求 $=2\overline{GI}=2\overline{AI}$。令 M 為 $\overline{AG}$ 中點，則

$$\overline{AI}=\overline{AM}\cdot\sec15^\circ=\overline{AE}\cdot\cos30^\circ\cdot\sec15^\circ=\overline{AE}\cdot\sin60^\circ\cdot\sec15^\circ=\overline{AE}\cdot\frac{4\sin15^\circ\cos15^\circ\cos30^\circ}{\cos15^\circ}$$

$$=4\overline{AE}\sin15^\circ\cos30^\circ==4(\overline{AB}-\overline{BE})\sin15^\circ\cos30^\circ==4\overline{AB}\left(1-\tan30^\circ\right)\sin15^\circ\cos30^\circ=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$$ 。

是故所求 $=4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$。

9. 令 $a_i=\sin^2\theta_i$，$\theta_1=\theta_{2021}$，則 $S=\sum_{i=1}^{2020}\sqrt[110]{\sin^2\theta_i\cos^2\theta_{i+1}}$。根據算幾不等式

$\frac{1}{110}\left(\sin^2\theta_i+\cos^2\theta_{i+1}+\frac{110-2}{2}\right)\ge\sqrt[110]{\sin^2\theta_i\cdot\cos^2\theta_{i+1}\cdot\frac{1}{2^{110-2}}}=\frac{1}{2^{\frac{108}{110}}}\sqrt[110]{\sin^2\theta_i\cdot\cos^2\theta_{i+1}}$ 則。由於上式對

於 $i=1,2,\dots,2020$ 皆成立，且 $\theta_1=\theta_{2021}$，故 $\frac{1}{110}\left(2020+54\times2020\right)\ge\frac{1}{2^{\frac{54}{55}}}\cdot S$。因此 $S\le\frac{2020}{\sqrt[55]{2}}$。當

$a_i=\sin^2\theta_i=\frac{1}{2}$，$i=1,2,\dots,2021$，時，$S$ 有 $\frac{2020}{\sqrt[55]{2}}$。

10. 利用柯西不等式，$\left(a^2+b^2\right)\left(1^2+1^2\right)\geq\left(a+b\right)^2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\geq\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$，同理，$\sqrt{b^2+c^2}\geq\dfrac{b+c}{\sqrt{2}}$，

$\sqrt{c^2+a^2}\geq\dfrac{c+a}{\sqrt{2}}$，因此 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\dfrac{2(a+b+c)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$。

11. 令 $\sin x+\cos x=t$，$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$，則原式$=|t+\dfrac{2}{t^2-1}+\dfrac{2t}{t^2-1}|$，討論如下：

(1)當 $t-1>0$，原式$=t+\dfrac{2}{t-1}=(t-1)+\dfrac{2}{t-1}+1\geq 2\sqrt{2}+1$

(1)當 $t-1<0$，原式$=-t-\dfrac{2}{t-1}=-(t-1)+\dfrac{2}{t-1}-1\geq 2\sqrt{2}-1$

因此，當 $t-1=\dfrac{1}{t-1}\Leftrightarrow t=1-\sqrt{2}$ 時，原式有最小值 $2\sqrt{2}-1$。

12. 連接 $\overline{BE}$、$\overline{CF}$，並延長相交於點 M，則 M 為 $\overline{AD}$ 的中點。因為 E、F 分別為 ΔABD 和 ΔACD 的重心，所以 $\overline{ME}:\overline{MB}=\overline{MF}:\overline{MC}=1:3$。因為 $\overline{EF}\parallel\overline{BC}$、$\overline{EG}\parallel\overline{BD}$，所以

$\overline{MG}:\overline{DM}=\overline{ME}:\overline{MB}=1:3$，$\overline{DG}:\overline{DM}=\overline{BE}:\overline{BM}=2:3$，故 $\overline{MG}=\dfrac{1}{3}\overline{DM}$、$\overline{DG}=\dfrac{2}{3}\overline{DM}$。因為

$\overline{AG}=\overline{AM}+\overline{MG}=\overline{DM}+\dfrac{1}{3}\overline{DM}=\dfrac{4}{3}\overline{DM}$，所以 $\overline{DG}:\overline{GA}=\dfrac{2}{3}\overline{DM}:\dfrac{4}{3}\overline{DM}=1:2$。