高雄市立高雄高級中學 第 110 學年度數學科能力競賽初試第二階段試題

（請將作答過程填寫在空白答案卷上，並標明題號）

計算證明題（每題 10 分）

1. 求滿足不等式$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{11}\right]+\left[\frac{n}{13}\right]<n$的最大正整數$n$，其中[x]表示不超過實數$x$的最大整數。

2. 設$x\geq 3675, y\geq 3675, z\geq 1323$，聯立方程組$\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y-1323}-\sqrt{z-1323}\\ \sqrt{y}=\sqrt{x-675}+\sqrt{z-675}\\ \sqrt{z}=\sqrt{y-3675}-\sqrt{x-3675}\end{cases}$，試求$z$值。

3. 設$ABCD$為圓內接四邊形，其中$\overline{AB}=3,\overline{BC}=4,\overline{CD}=5,\overline{DA}=6$，並設$E$與$G$分別為從點$A$與點$C$到直線$BD$的垂足；$F$與$H$分別為從點$B$與點$D$到直線$AC$的垂足。若四邊形$EFGH$的周長$\frac{m}{n}$，其中$m,n$為互質的正整數，則$m+n=?$

4. 設a,b,c為正實數，且$a+b+c=16$，且$\frac{a+b-c}{ab}+\frac{b+c-a}{bc}+\frac{a+c-b}{ac}=\frac{1}{2}$，試證明：$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$為直角三角形之三邊長。

5. 設a,b,c為非零之整數，且$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$和$\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$皆為整數，試證明：$|a|=|b|=|c|$.

6. 試求：滿足等式$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{25}^2=2+x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{24}x_{25}$的非負整數解$(x_1,x_2,\ldots x_{24},x_{25})$有幾組？

7. 若有一數列$\{a_n\}=\{13，25，43，\ \ldots\}$，第$n$項$a_n=3(n^2+n)+7$，試問此數列中，是否有些項是整數的立方？若有，請寫出，若沒有，請證明之。

8. 在以O為內切圓圓心的四邊形$ABCD$中，已知$\overline{OA}=5$，$\overline{OB}=6$，$\overline{OC}=7$，$\overline{OD}=8$，設M為$\overline{AC}$的中點，N為$\overline{BD}$的中點，求$\overline{OM}:\overline{ON}=?$

9. 試找出所有大於 3 的正整數 n，使 n 滿足：「$a_1,a_2,\ldots.,a_n$成等差數列，若$a_1+2a_2+3a_3+\cdots na_n$為有理數，則$a_1,a_2,\ldots.,a_n$中至少有一個數為有理數」。

10. 數學科舉行期末網球單打 PK 循環賽，共有 20 位選手參加，任二人均比一場，無平手。若其中 A，B，C 三名選手的勝負情況為「A 勝 B，B 勝 C，C 勝 A」，稱此三人形成一個三角結。試問一場單打 PK 循環賽最多會有幾個三角結？

11. 已知數列$\{x_n\}$滿足$x_1=2$，對於任意正整數n，均有$x_{n+1}=\sqrt{x_n+8}-\sqrt{x_n+3}$，試證明: 數列$\{x_n\}$收斂，並求其極限。

12. 有 n 個選手參加數學競試，其中有些選手互相認識，並且兩個不相識的選手都恰有兩個共同的熟人。若選手 A 與選手 B 認識，且沒有共同的熟人，試證明他們(即 A 與 B)認識的人一樣多。

高雄市立高雄高級中學 第 110 學年度數學科能力競賽初試第二階段試題

（請將作答過程填寫在空白答案卷上，並標明題號）

1.求滿足不等式$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{11}\right]+\left[\frac{n}{13}\right]<n$的最大正整數$n$，其中[x]表示不超過實數$x$的最大整數。

解答：根據除法原理，對任意正整數x，k，存在整數q，r，滿足$x=kq+r(0\le r\le k-1)$

所以$\left[\frac{x}{k}\right]=\left[\frac{kq+r}{k}\right]=q+\left[\frac{r}{k}\right]=q$，且$x=kq+r\le kq+k-1\Rightarrow x-k+1\le kq\Rightarrow q=\left[\frac{x}{k}\right]\ge\frac{x-k+1}{k}$

若$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{11}\right]+\left[\frac{n}{13}\right]<n$，$\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{3}+\frac{n-10}{11}+\frac{n-12}{13}\le\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{11}\right]+\left[\frac{n}{13}\right]\le n-1$

得到$n\le 1715$，當$n=1715$時，

$\left[\frac{1715}{2}\right]+\left[\frac{1715}{3}\right]+\left[\frac{1715}{11}\right]+\left[\frac{1715}{13}\right]=857+571+155+131=1714<1715.$

2. 設$x\ge 3675,y\ge 3675,z\ge 1323$，聯立方程組$\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y-1323}-\sqrt{z-1323}\\ \sqrt{y}=\sqrt{x-675}+\sqrt{z-675}\\ \sqrt{z}=\sqrt{y-3675}-\sqrt{x-3675}\end{cases}$，試求$z$值。

解答：由第一，三式$\begin{cases}\sqrt{y-1323}=\sqrt{x}+\sqrt{z-1323}\\ \sqrt{x-3675}=\sqrt{z}+\sqrt{y-3675}\end{cases}$，兩邊平方$\begin{cases}y=x+z+2\sqrt{x}\sqrt{z-1323}\\ y=z+x+2\sqrt{z}\sqrt{x-3675}\end{cases}$

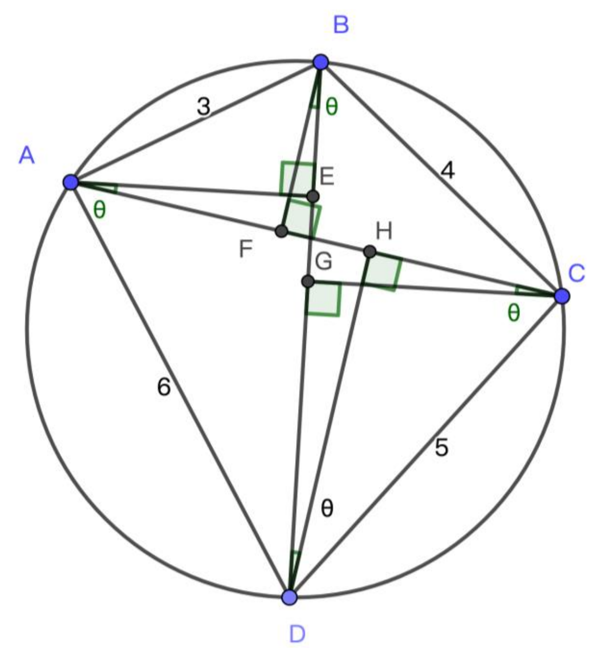
得 $\sqrt{z}\sqrt{x-3675}=\sqrt{x}\sqrt{z-1323}\Rightarrow xz-1323x=zx-3675z\Rightarrow x=\frac{3675}{1323}=\frac{25}{9}z$，

又由第二，三式兩邊平方$\begin{cases}x=y+z-2\sqrt{y}\sqrt{z-675}\\ x=y+z-2\sqrt{y-3675}\sqrt{z}\end{cases}$，得$\sqrt{y}\sqrt{z-675}=\sqrt{y-3675}\sqrt{z}$，

平方後$yz-675y=yz-3675z\Rightarrow y=\frac{49}{9}z$，令$(x,y,z)=(25t,49t,9t)$代回原式，

解得$t=196$，故$z=1764$

3. 設$ABCD$為圓內接四邊形，其中$\overline{AB}=3,\overline{BC}=4,\overline{CD}=5,\overline{DA}=6$，並設$E$與$G$分別為從點$A$與點$C$到直線$BD$的垂足；$F$與$H$分別為從點$B$與點$D$到直線$AC$的垂足。若四邊形$EFGH$的周長$\frac{m}{n}$，其中$m,n$為互質的正整數，則$m+n=$?



解答：ABEF 四點共圓，且以 AB 為直徑，CDGH 四點共圓，以 CD 為直徑，$\angle FBE=\angle FAE$(對EF弧)且$\angle GDH=\angle GCH$(對GH弧)，又$\angle FBE=\angle GDH$(內錯角)，令$\angle FBE=\angle FAE=\angle GDH=\angle GCH=\theta$，根據正弦定理，所以$EF=3sin\theta$，$EH=4sin\theta$，$HG=5sin\theta$，$GF=6sin\theta$，周長$=18sin\theta$，已知

$s=\frac{3+4+5+6}{2}=9$，圓內接四邊形$ABCD$面積$=\sqrt{6\cdot5\cdot4\cdot3}=6\sqrt{10}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BDsin(90°-\theta)$，由托勒密定理：$AC\cdot BD=3\cdot5+4\cdot6=39$，得$cos\theta=\frac{4\sqrt{10}}{13}$，所以$sin\theta=$

$\frac{3}{13}$，得到周長 $=18sin\theta=\frac{54}{13}$，所以$\mathrm{m}+\mathrm{n}=54+13=67$

4. 設a,b,c為正實數，且$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=16$，且$\frac{a+b-c}{ab}+\frac{b+c-a}{bc}+\frac{a+c-b}{ac}=\frac{1}{2}$，試證明：$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$為直角三角形之三邊長。

證明：$\begin{cases} \mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=16 \\ \frac{a+b-c}{ab}+\frac{b+c-a}{bc}+\frac{a+c-b}{ac}=\frac{1}{2} \end{cases}$，將兩式相乘得：

$\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}+\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}+\frac{(a+c)^2-b^2}{ac}=8$，$\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}+\frac{(b+c)^2-a^2-4bc}{bc}+\frac{(a+c)^2-b^2-4ac}{ac}=0$，

$\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}+\frac{(b-c)^2-a^2}{bc}+\frac{(a-c)^2-b^2}{ac}=0$，$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}+\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{bc}+\frac{(a-c+b)(a-c-b)}{ac}=0$，得到

$\frac{(a+b-c)}{abc}[ac+bc+c^2+ab-ac-a^2+ab-bc-b^2]=0$，$(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)=0$，

故$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$為直角三角形之三邊長。

5. 設a,b,c為非零之整數，且$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$和$\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$皆為整數，試證明：$|a|=|b|=|c|$.

證明：考慮三根為$\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}$的多項式f(x)，

$\mathrm{f(x)}=\left(\mathrm{x}-\frac{a}{b}\right)\left(\mathrm{x}-\frac{b}{c}\right)\left(\mathrm{x}-\frac{c}{a}\right)=x^3-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)x^2+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)x-1$，故f(x)為整係數多項式

因為整係數方程式 $\mathrm{f(x)}=0$之三根皆是有理根，根據牛頓定理，有理根必為整數根±1，

所以三整數根絕對值皆為 1，即$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{b}{c}\right|=1$，故$|a|=|b|=|c|$.

6. 試求：滿足等式$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{25}^2=2+x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{24}x_{25}$的非負整數解$(x_1,x_2,\ldots x_{24},x_{25})$有幾組？

解答：令$x_0=0$，將式子改成

$$2x_0^2+2x_1^2+2x_2^2+\cdots+2x_{25}^2=4+2x_0x_1+2x_1x_2+2x_2x_3+\cdots+2x_{24}x_{25}+2x_{25}x_0$$

$\Rightarrow(x_0-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{25}-x_0)^2=4$，因為$x_0-x_1,x_1-x_2,\ldots,x_{25}-x_0$共 26 項，這 26 個整數總和是 0，平方和是 4，所以這 26 個整數只可能是$0,\pm1,\pm2$中的一個，若假定有±2，則其他項只能是 0，這與他們和是 0 矛盾，所以，他們全都是$0,\pm1$，故可能為 1，1，-1，-1，其他都是 0，根據$x_0=0$，所以$x_0-x_1,x_1-x_2,\ldots,x_{25}-x_0$中的非零項按順序只能是

$-1,-1,1,1$ 或者 $-1,1,-1,1$，所以非負整數組數有$2\cdot C_4^{26}=29900$.

7. 若有一數列$\{a_n\}=\{13，25，43，\ldots\}$，第$n$項$a_n=3(n^2+n)+7$，試問此數列中，是否有些項是整數的立方？若有，請寫出，若沒有，請證明之。

解答：數列中的每一項皆不為整數的立方。

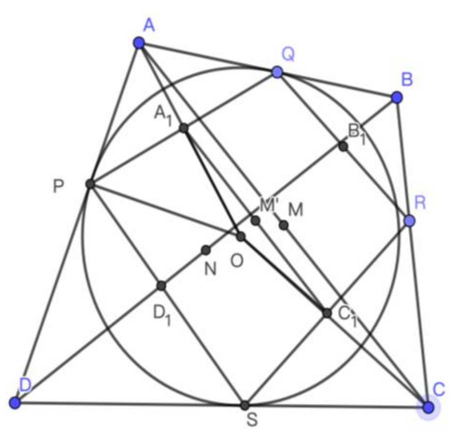
反證法：設存在某個整數t，滿足 $3(n^2+n)+7=3n(n+1)+7=t^3$，則t為奇數，令 $t=2s+1$，其中s為整數，則$3(n^2+n)+7=(2s+1)^3\Rightarrow3(n^2+n)+6=8s^3+12s^2+6s$

$\Rightarrow3|s$，令$s=3k$，k為整數，則 $3(n^2+n)+6=8\cdot27k^3+12\cdot9k^2+18k$

$\Rightarrow(n^2+n)+2=72k^3+36k^2+6k$，等式右邊為 3 的倍數，但左邊不為 3 的倍數。矛盾。

故數列中的每一項皆不為整數的立方。

8. 在以O為內切圓圓心的四邊形$ABCD$中，已知$\overline{OA}=5$，$\overline{OB}=6$，$\overline{OC}=7$，$\overline{OD}=8$，設M為$\overline{AC}$的中點，N為$\overline{BD}$的中點，求$\overline{OM}:\overline{ON}=$?



解答：設

內切圓與四邊$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DA}$的切點為Q，R，S，P，且$\overline{PQ}$，$\overline{QR}$，$\overline{RS}$，$\overline{SP}$的中點為A_1，B_1，C_1，D_1，且A_1，B_1，C_1，D_1必分別落在$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$，$\overline{OD}$上，令內切圓圓心為r，因為$\Delta APO \sim \Delta PA_1O$，得到$\overline{A_1O} = \frac{r^2}{\overline{AO}} = \frac{r^2}{5}$，同理$\overline{C_1O} = \frac{r^2}{\overline{CO}} = \frac{r^2}{7}$，

又$\overline{AO}:\overline{CO} = \overline{C_1O}:\overline{A_1O}$，$\angle \mathrm{AOC} = \angle C_1\mathrm{O}A_1$，得到$\Delta AOC \sim \Delta C_1OA_1$，設$\overline{A_1C_1}$

的中點為M'，則$\Delta AOM \sim \Delta C_1OM'$，$\overline{OM} = \overline{OM'} \cdot \frac{35}{r^2}$，同樣地設$\overline{B_1D_1}$

的中點為N'，則$\overline{ON} = \overline{ON'} \cdot \frac{48}{r^2}$，$\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OC_1}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OD_1}\right) = \overrightarrow{ON'}$，

所以$M' = N'.\overline{OM}:\overline{ON} = \overline{OM'} \cdot \frac{35}{r^2}:\overline{ON'} \cdot \frac{48}{r^2} = 35:48$

9. 試找出所有大於 3 的正整數 n，使 n 滿足：「$a_1, a_2, \ldots, a_n$成等差數列，若$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots \mathrm{n}a_n$為有理數，則$a_1, a_2, \ldots, a_n$中至少有一個數為有理數」。

解答： $n = 3k + 1, k$為正整數。

設$a_1, a_2, \ldots, a_n$數列的公差為d，則$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots \mathrm{n}a_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{n} k[a_1 + (k-1)d]$

$= a_1 \sum_{k=1}^{n} k + d\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n+1)}{2}\left[a_1 + \frac{2(n-1)d}{3}\right] = \frac{n(n+1)}{2}\left[a_1 + \left(\frac{2n+1}{3} - 1\right)d\right]$

情況一：若$n-1$為 3 的倍數，則$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots \mathrm{n}a_n = \frac{n(n+1)}{2} a_{\frac{2n+1}{3}}$，故$a_{\frac{2n+1}{3}}$為有理數。

情況二：若$n-1$不為 3 的倍數，取$a_1 = \sqrt{2}$，$d = -\frac{3}{2(n-1)}\sqrt{2}$，則數列$a_1, a_2, \ldots, a_n$中的每一項皆為無理數，但$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots \mathrm{n}a_n$為有理數。

故滿足條件的正整數，即$n-1$為 3 的倍數。

10. 數學科舉行期末網球單打 PK 循環賽，共有 20 位選手參加，任二人均比一場，無平手。若其中 A，B，C 三名選手的勝負情況為「A 勝 B，B 勝 C，C 勝 A」，稱此三人形成一個三角結。試問一場單打 PK 循環賽最多會有幾個三角結？

解答：設 20 名選手編號為$p_1, p_{2,\ldots} p_{20}$，對任一選手而言，例如p_1，共比 19 場，設勝場數為n_1場，敗場數為$19 - n_1$，

p_1在所勝的n_1個對手中，任取兩人，無法與p_1形成三角結，有$C_2^{n_1}$種;

p_1在所敗的$(19 - n_1)$個對手中，任取兩人，無法與p_1形成三角結， 有$C_2^{19-n_1}$種

所以在有p_1參賽的比賽中，共有$C_2^{n_1} + C_2^{19-n_1}$種無法形成三角結，

$C_2^{n_1} + C_2^{19-n_1} = \frac{n_1(n_1-1)+(19-n_1)(18-n_1)}{2} = n_1^2 - 19n_1 + 171 = \left(n_1 - \frac{19}{2}\right)^2 + \frac{323}{4}$，所以$n_1$勝 9 場(敗 10 場)或勝 10 場(敗 9 場)時，有最少的三角結，$C_2^9 + C_2^{10} = 36 + 45 = 81$，所以非三角結至少有$\frac{81 \times 20}{2} = 810$場(除以 2 是因為非三角結(A 勝 B,C),(B 勝 A,B 敗 C),(C 敗 A,C 敗 B)，被計 A 二勝，C 二敗，共 2 次)

所以三角結最多有$C_3^{20} - 810 = 1140 - 810 = 330$，極值出現在 10 人 10 場，10 人勝 9 場時。

11 已知數列$\{x_n\}$滿足$x_1 = 2$，對於任意正整數n，均有$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}$，

試證明: 數列$\{x_n\}$收斂，並求其極限。

解答：根據定義，$x_n > 0$，對所有的正整數n，$|x_{n+1} - 1| = \left|\sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3} - 1\right| = \left|\sqrt{x_n + 8} - 3 - \sqrt{x_n + 3} + 2\right| = \left|(x_n - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_n+8}+3} - \frac{1}{\sqrt{x_n+3}+2}\right)\right| \le |(x_n - 1)|\left(\frac{1}{\sqrt{x_n+8}+3} + \frac{1}{\sqrt{x_n+3}+2}\right) \le |(x_n - 1)|\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}|(x_n - 1)| \le \frac{5}{6}|(x_{n-1} - 1)| \le \cdots \le (\frac{5}{6})^{n-1}|(2-1)|$，因為$\lim_{n\to\infty}(\frac{5}{6})^{n-1} = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

12. 有 n 個選手參加數學競試，其中有些選手互相認識，並且兩個不相識的選手都恰有兩個共同的熟人。若選手 A 與選手 B 認識，且沒有共同的熟人，試證明他們(即 A 與 B)認識的人一樣多。

解答：設 A 認識 m 個人，他們是$C_1, C_2, \ldots C_m$，因為A，B 沒有共同的熟人，所以$C_1, C_2, \ldots C_m$與 B 都不認識。就C_k而言，$k = 1,2, \ldots, m$，B 與C_k恰有兩個共同的熟人，設D_k是他們的熟人，則D_k不是 A，且D_k與 A 不認識。若在$D_1, D_2, \ldots, D_k$中有兩個人相同，不妨設$D_i = D_j, i \neq j$，此時D_i與 A 都認識 B，C_i, C_j，此結果與已知矛盾，所以D_k ，$k = 1,2, \ldots, m$都不相同，即 B 認識的人不少於 A 認識的人，同理可證，A 認識的人不少於 B 認識的人，因此，可確定 A，B 認識的人一樣多。