現 金 卡 利 息 計 算 之 迷 思

底下是時下流行的某銀行發行之現金卡廣告詞：

「『XX 現金卡』採固定年利率 18.25% ，按日計息，不動用不計息，當日借還亦可免息（即當日借入款項於本行營業日當日 15:30 前還款免計收利息），借多少天才算多少天利息，借一萬元每日只需 5 元利息。」

多麼吸引人的廣告!定揚就去辦一張現金卡放身邊，以備不時之需！結果真有一天，亟需用錢，定揚以現金卡借用了 10 萬元。經過一個月後，準備了$100000\left(1+\frac{18.25\%}{365}\times 30\right)=101500$元要還銀行欠款時，

銀行行員說：「不對！你的欠款一共是101511元！」

定揚問說：「為什麼多了11元？」

行員回答說：「現金卡按日計息，所以欠款為$100000\left(1+\frac{18.25\%}{365}\right)^{30}=101511$元。」

這時，定揚恍然大悟說：「這分別是數學課中所學，單利與複利的計算方式，一個為等差數列，另一個為等比數列，而等比數列增加的速度快多了！有了這次經驗下次要小心一點了，不然要是條款寫說以時計息，甚至以分，以秒計息，那要付出的利息，豈不是會更多更多！」

定揚的想法對不對呢？我們準確一點來計算一下：

若以日計息，本利和為$100000\left(1+\frac{18.25\%}{365}\right)^{30}=101510.92592172751062\approx 101511$元；

若以時計息，本利和為$100000\left(1+\frac{18.25\%}{365\times 24}\right)^{30\times 24}=101511.29060065179262\approx 101511$元；

若以分計息，本利和為$100000\left(1+\frac{18.25\%}{365\times 24\times 60}\right)^{30\times 24\times 60}=101511.30619721959889\approx 101511$元。

這個結果與定揚的想像有一點差距，利息是增加了沒錯，但是不會增加的很多！(1)

為什麼？我們以數學的角度來看，假設一天分為n個計息單位，數列$\left\langle 100000\left(1+\frac{18.25\%}{365\times n}\right)^{30\times n}\right\rangle$是遞增的，定揚的感覺是對的；但這數列不會趨近於∞，定揚的感覺是錯的！事實上，這數列的極限值為

$$100000\times e^{\frac{30\times 18.25\%}{365}}\approx 101511.30646157189793\text{。}$$

十瑞士法郎的紙幣之上的肖像是 Euler

上式中出現了一個奇怪的常數e，它是一個無理數，其近似值$e \approx 2.71828182845904523 54$，是數學裡最重要的五個數之一（另外四個都是我們熟悉的0、1、π及i），它是數列$<(1+\frac{1}{n})^n>$的極限值，這數列的收斂現象，不知何時被發現的，但用e這個符號，則是 Euler（1707 年—1783 年)所訂定的。我們也不知該如何稱呼這個奇怪常數，一般我們都是這樣描述這個數，「它是『自然對數』的底」。

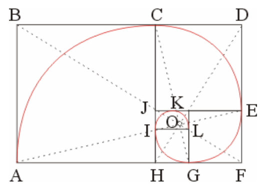
What？我們在高中數學中，接觸過對數，以10為底的對數稱為「常用對數」，e有什麼能耐能稱為「自然對數」的底？以下我們舉幾個與e有關的例子，讓各位讀者自行決定e是否名副其實的「自然」！

（1）大自然中很多生物的生長都呈現等角螺線[(2)]的形狀，如鸚鵡螺的橫截面，向日葵、鳳梨與雛菊上的螺旋紋，就連知名的黃金螺線亦為等角螺線。而等角螺線在極坐標中所代表的方程式為$r = e^{a\theta}$，$a \in \mathbf{R}$。

鸚鵡螺

（2）法國著名的昆蟲詩人法布爾（Fabre, 1823~1915）：

「神奇的數e出現了，就寫在蜘蛛絲上面。在薄霧的清晨，讓我們觀察昨夜織成的蜘蛛網，具黏性的絲，負載著小水珠的重量，彎曲成一條條的懸鏈線，水珠沿著曲線排成美麗的項鍊。當晨曦穿透霧氣，照射在蜘蛛網上，閃耀著彩虹色的亮光，就像一盤奪目的珍珠，榮耀歸功於e。」



黃金螺線

文中所謂之「懸鏈線」指的是：把一條細繩掛在兩定點上，讓他自由懸垂下來所形成的曲線。而懸鏈線方程式為何？這就是有名的「懸鏈線問題」，在1690年由 Jakob Bernoulli（1654～1705)提出，在一年後被解答，其方程式用現代符號表示就是$y = \dfrac{(e^{ax} + e^{-ax})}{2a}$，$a \in \mathbf{R}$。

聖路易市的拱門是一倒過來的懸鏈線

註：

(1) 因為這種特性，實際上，銀行在這種小額短期的借貸，是採單利計算的！

（銀行樂得大方，反正多不了多少利息。）

(2) 一般而言，若一曲線在每個點P的切向量都與某定點O至此點P所成的向量OP夾成一定角，且定角不是直角（若為直角，則此曲線為圓），則此曲線稱為一等角螺線，O點稱為它的極點。