

What's fun in EE

臺大電機系科普系列



淺介光子的分割、合成與應用——由三角函數談起

彭隆瀚／國立臺灣大學電機工程學系教授

「光」這個現象與其器用，散見於各文明古籍之記載，見證了人類對於「光」由起始之無知與畏懼，透過對其現象之觀察與歸納，而發展實務之應用並成為科學支脈的歷程。在西元前 5 世紀的戰國時期，由墨翟與其門生所撰寫的「墨子」一書^[1]，對於「幾何光學」裡之平面鏡、凹面鏡、凸面鏡、與針孔成像，有著生動的敘述一舉例而言，「墨子」卷十「經下」與「經說下」裡記載著：鑿位，景一小而易，景一大而正，說在中之外、內。中之內，鑿者近中，則所鑿大，景亦大；遠中，則所鑿小，景亦小，而必正。[簡譯：觀察者（鑿者）在凹面鏡焦點（謂之「中」）以內，觀察到的是正立的（虛）像。]中之外，鑿者近中，則所鑿大，景亦大；遠中，則所鑿小，景亦小，而必易。[簡譯：觀察者在焦點以外，觀察到的是倒立（謂之「易」）的（實）像。]這不就是我們在中學物理所學之造鏡者公式中，關於凹面鏡物距 (s_o)、像距 (s_i) 與焦點 (f) 的成像關係嗎？

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

在約與墨子同一時期的古西方文明裡，關於光的反射、聚焦、折射等現象的描述，也記載於歐幾里德（Euclid 西元前 3 世紀）、托勒密（Ptolemy 西元 2 世紀）等人之著作而成呈現^[2]。

通過東西方世代文明裡眾多傑出科學家的智慧，我們在中學物理課程裡，初由關於幾何光學的原理，逐步學習到近代物理裡中「光」之粒子、波動雙重特性。^[3]今天我們就與各位讀者分享「現代光學」裡一個有趣的題目：如何藉由光與物質的作用，進行光子的分割與合成。

1. 「中國哲學書電子計畫」—墨子 <http://ctext.org/mozi/canon-ii/zh>

2. 西方光學的演變歷史 “History of optics.” http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_optics

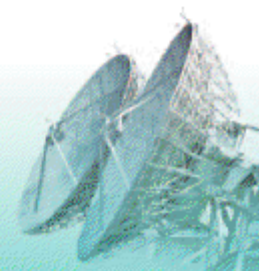


臺灣大學電機工程學系

10617 台北市 大安區 羅斯福路四段一號

Email: dept@cc.ee.ntu.edu.tw

<http://www.ee.ntu.edu.tw/>





這個命題，初看令人不禁茫然：光子，沒有質量，總不能如拿刀切瓜，要怎麼割？好吧，如果你能分割光子，那麼反過來，把光子捏一捏，「你泥中有我，我泥中有你」，捏一個「大」、捏一個「小」光子出來看看囉！各位讀者，這就是電機領域裡關於尖端科學探索一個有趣的例子。就讓我們從中學課程裡學到的三角函數、簡諧運動、以及光具有粒子與波動雙重特性等基本知識出發，來探索吧！

在簡諧運動裡，鐘擺位置是隨時間變化的，在直線方向上的投影量 $x(t)$ 可描述為：

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad (2)$$

我們在中學物理課程裡，尚未學到光波（電磁波）的數學函數表示法。其實，當觀察者立於原點位置，他所觀測之光波（電磁波）隨時間的變化量，就如公式 (2) 簡諧運動的表示式。只是這時要將簡諧運動的角頻 ω ($\omega = 2\pi/T$, T 是簡諧運動的週期)，代換成光波的角頻率 ω ，而公式 (2) 裡的 A ，就表示成光波的振幅。

另一方面，光波之波長 (λ)、角頻率 (ω) 與真空中光速 (c)，滿足以下關係式

$$c = \omega (\lambda/2\pi) \quad (3)$$

將公式 (3) 整理，得

$$\omega = c k \quad (4)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$ (k 在電磁學裡的名稱是波前向量)，在光的粒子模型裡，光的動量 p 可表為

$$p = \hbar k = \hbar/\lambda \quad (\hbar \text{ 為蒲朗克常數除以 } 2\pi) \quad (5)$$

此處 $p = \hbar/\lambda$ 與德布洛依物質波模型裡之公式相符；而光波（或光子）能量 E 可表為

$$E = \omega = \hbar \nu \quad (\nu = \omega/2\pi) = \hbar(c/\lambda) \quad (6)$$

各位讀者，我們接下來考慮光與物質的交互作用。先想像有這麼一種經過「特殊設計」的光學結構（換成電機人的術語，就是我們利用奈米、光電技術，製造出一種東西，或稱作元件），使得當具有不同頻率（波長）之 $\omega_1, \omega_2, \dots (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ 光波入射到這個人為光學結構後，除了發生傳統幾何光學裡的反射、折射等效應之外，還提供額外的功效——光子能量的變化。

啥米？真有這麼好康的東西，可以用來改變光子的能量（波長）？那麼給我一道綠光，不就可以生出紅光、黃光、藍光... 以及人眼看不見的紅外光、紫外光，這難道是天方夜譚嗎？各位讀者，且讓我們由中學所習得之物理知識與三角函數運算，來了解一下這項命題的可行性：

假設現在有兩道不同頻率 ω_1, ω_2 與振幅 A_1, A_2 的雷射光，可供我們進行虛擬實驗，利用公式 (2)，我們可將這兩道雷射光描述為：

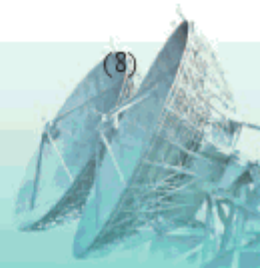
$$F_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) \quad (7a)$$

$$F_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) \quad (7b)$$

這裏為方便讀者了解起見，我們暫且忽略兩波之間或存有相位差。（在現代光學的技術裡，我們可透過特殊設計的光電元件，來控制作用波之間相互的相位差，以及個別作用波之振幅）

接下來，我們想像有這麼一個神奇的魔鏡 -- 噢！它的正式名稱該是光學非線性元件，對於公式 (7a)(7b) 所描述的雷射光，具備以下功能 $F(t)$

$$F(t) = [F_1(t) + F_2(t)]^2 \quad (8)$$





將公式 (7a)(7b) 代入公式 (8)，經過二項式展開可得

$$F(t) = (A_1)^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) + (A_2)^2 \cos^2(\omega_2 t) \quad (9)$$

我們再應用三角函數的展開公式

$$\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2 \quad (10a)$$

$$\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 = (1/2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + (1/2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (10b)$$

以公式 (10a)(10b) 重新整理式 (9)，得

$$\begin{aligned} F(t) = & 1/2 [(A_1)^2 + (A_2)^2] \\ & + 1/2 [(A_1)^2] \cos(2\omega_1 t) \\ & + 1/2 [(A_2)^2] \cos(2\omega_2 t) \\ & + A_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \omega_2 t) \\ & + A_1 A_2 \cos(\omega_1 t - \omega_2 t) \end{aligned} \quad (11)$$

公式 (11) 裡有五個展開式：

- (i) $1/2 [(A_1)^2 + (A_2)^2]$ 代表是光波與元件作用後，產生了整流效應
- (ii) $1/2 [(A_1)^2] \cos(2\omega_1 t)$ 代表是頻率 ω_1 的雷射光波與元件作用後，產生頻率為 $2\omega_1$ 的光波
- (iii) $1/2 [(A_2)^2] \cos(2\omega_2 t)$ 代表是頻率 ω_2 的雷射光波與元件作用後，頻產生頻率為 $2\omega_2$ 的光波
- (iv) $A_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \omega_2 t)$ 代表是頻率分別為 ω_1 與 ω_2 的雷射光波，與元件作用後，產生頻率為 $\omega_1 + \omega_2$ 的光波
- (v) $A_1 A_2 \cos(\omega_1 t - \omega_2 t)$ 代表是頻率分別為 ω_1 與 ω_2 的雷射光波，與元件作用後，產生頻率為 $\omega_1 - \omega_2$ 的光波

公式 (11) 所描述的現象，是經由光的「波動」性質，來理解光與「特殊設計」之光電元件（介質）作用後，使得光波之頻率（波長）產生變化。各位讀者或許不禁要懷疑，這真能實現嗎？還是紙上談兵呢？那麼不妨讓我們由另一觀點：光具備「粒子」特性的角度出發，再來看這樣「特殊設計」之光電元件，需要具備哪些物理性質，才能滿足式 (11)。

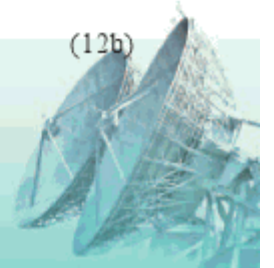
各位讀者還記得在高中物理之「力學」部分，所學到的鋼球碰撞嗎？（記不起來的話，就想它是撞球唄！）假設有一質量為 M 的大球、以速度 V_1 正向碰撞一質量為 m 的靜止小球。試問碰撞後大小球之速度 V_1 、 V_2 為何？兩球作用（碰撞）前後，有哪些物理量可以發生變化？又有哪些物理量需要守恆？閱讀到此，各位讀者們想必是鬆了一口氣，總算出現個容易回答的問題—鋼球碰撞前後，各個單體的能量與動量可以交換，但系統的總能量與動量需要守恆。所以大球碰撞後速度減慢， $V_1 = [1-2m/(M+m)] V_1$ ；小球則獲得由大球傳遞過來的能量，以速度 $V_2 = [2M/(M+m)] V_1$ 前進。

雖然光也具備「粒子」特性（公式 5,6），但光子不具備質量，所以公式 (8) 所述的「神奇介質」，就扮演著當光子在此神奇介質中進行能量交換時，所需要滿足動量守恆的角色。後者也反應出，光在介質中傳遞時，動量公式 (5) 裡要用 (λ/n) 取代原先真空狀態下（折射係數 $n=1$ ）的公式。

因此，當一群具有頻率為 ω_1 的光子，進入到公式 (8) 所述的神奇介質時，系統裡面可以發生以下的事件：

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_1 = \hbar\omega_f \quad (12a)$$

$$\hbar k_{\omega_1} + \hbar k_{\omega_1} + \text{介質作用} = \hbar k_f \quad (12b)$$





可將公式(12)等號的左(右)邊，理解為光子與神奇介質作用前(後)，系統的能量(12a)與動量(12b)都要守恆的關係式。這是頻率為 ω_1 光子，經由介質作用，合成為較高頻率 $\omega_2 = 2\omega_1$ (頻率倍增)光子的過程。

當然，類似的事件也可以逆向發生。當一群具有頻率為 ω_1 的光子，進入到公式(8)所述的神奇介質時，系統裡面也可發生以下的事件：

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3 \quad (13a)$$

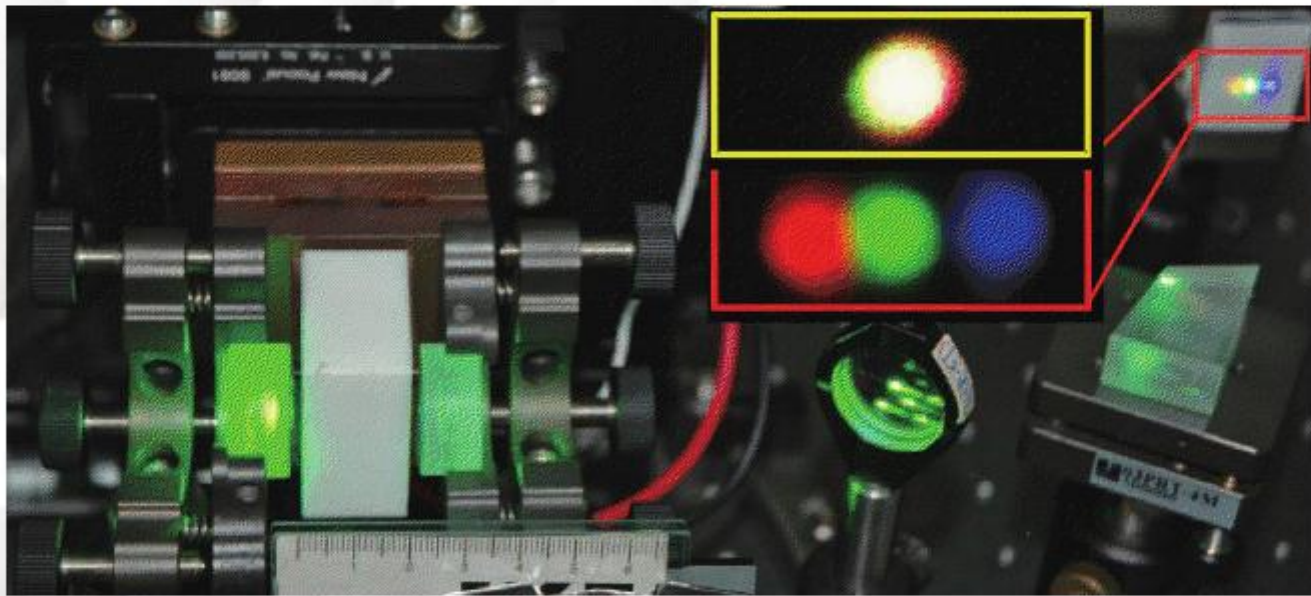
$$\hbar k_{\omega_1} = \hbar k_{\omega_2} + \hbar k_{\omega_3} + \text{介質作用} \quad (13b)$$

這是頻率為 ω_1 光子，經由介質作用，「分割」為具有較低頻率(ω_2, ω_3)光子的過程。

綜合以上討論，我們了解到當一群頻率同為 ω_1 的光子(我們就稱之為雷射吧)，作用在一具備「特殊結構」的神奇介質(光學非線性光電元件)：當滿足動量守恆時，原先頻率為 ω_1 的光子就有機會被「分割」成為頻率較低的兩組光子 ω_2, ω_3 ，並滿足 $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ (公式13a)。

如果這個「特殊結構」的光學非線性光電元件，還有其他後級結構設計，例如滿足公式(12b)動量守恆條件，那麼由第一級結構所產生頻率為 ω_2 與 ω_3 的光子，就有機會進一步轉變為頻率為 $2\omega_2, 2\omega_3$ 或 $(\omega_2 \pm \omega_3)$ 的光子了。

眼見為憑，最後就讓作者以下圖為例，與各位讀者分享在電機領域裡，藉由奈米與光電科技，來實現光子的分割與合成 -- 這麼個有趣的科學命題吧。



圖二 台大電機系師生所研製的白光雷射

說明：經由一「特殊結構」設計的光學非線性元件(置於圖中長約2公分之白色保溫套筒內)，將入射波長為532奈米之綠光雷射光子，經元件之前級作用，「分割」成為波長為630奈米的紅光雷射(經三菱鏡分光如圖示)與波長為3420奈米的(不可見)紅外光雷射。在此元件之後級端，綠光光子進行第二次分割，產生波長為870與1370奈米的光子，其中870奈米的光子，兩兩「合成」轉為波長為435奈米的藍光光子，而由三菱鏡分光(圖示)。這個實驗，衍生了利用綠光雷射光子，透過台大電機師生研製之光學非線性晶體，轉換為紅光與藍光光子，並形成白光雷射的過程。

