二元一次方程式的整數解問題

解方程式為數學中一個重要的問題，一般來說，我們對一元方程式的根了解比較清楚，(如：$ax+b=0$ 及 $ax^2+bx+c=0$)，而對於多元方程式的根就比較不了解，(如：$x^2y-2xy+3=0$)。而在這篇文章中，我們希望討論的是一次方程式

$ax+by=c$ $(a,b,c\in Z, a^2+b^2\neq 0)$---------------(1)

的整數解問題。((1)式亦稱為不定方程式)

很明顯的 $ax+by=c$ 的實數解有無窮多個，在坐標平面上，代表的是直線 $ax+by=c$ 上的點，而整數解問題也就與"直線 $ax+by=c$ 上有哪些格子點"的問題相同。

一般來說，當方程式不容易看出它的解時，在數學上我們會先來研究方程式是否有解。如果有解，再想辦法求出。如果求不出一般解，那就來研究解的性質。因此，一開始，我們先來討論方程式 $ax+by=c$ 的解的存在性問題。

有一個定理是這樣的：

定理 1：設 $a,b,c\in Z, a^2+b^2\neq 0$，若方程式 $ax+by=c$ 有整數解，則 $(a,b)\,|\,c$。

證明：*設 $(a,b)=d$，則 $d\,|\,a, d\,|\,b$，所以 $d\,|\,(ax+by)$，即 $d\,|\,c$。* QED.

這個定理說明了 $(a,b)\,|\,c$ 為方程式(1)式有整數解的必要條件，也就是說，並非隨便寫一個方程式就會有整數解，如方程式 $2x+4y=1$ 就沒有整數解，滿足 $(a,b)\,|\,c$ 的才有可能有整數解。

事實上，定理一是很直觀的一個結果，如 $2x+4y=2(x+2y)$ 恆為 2 的倍數，所以像方程式 $2x+4y=1, 3, 5,\cdots$ 均不可能有整數解。

反過來說，若 $(a,b)\,|\,c$，是否 $ax+by=c$ 會有整數解呢？我們來看下面的定理：

定理 2：設 $a,b\in Z$，則存在 $x_0,y_0\in Z$，使得 $ax_0+by_0=(a,b)$。

證明：*設 $S=\{ax+by\,|\,x,y\in Z\}$，很明顯可知 S 中必有正整數，設 $d_0=ax_0+by_0$ 為 S 中的最小正整數，$d=(a,b)$，則因為*

$d\,|\,a$, $d\,|\,b\Rightarrow d\,|\,ax+by$, $\forall x,y\in Z$，*所以* $d\,|\,d_0$，

若 $a=d_0q_1+r_1, b=d_0q_2+r_2$，*其中* $0\le r_1, r_2<d_0$ *則*

$r_1=a-d_0q_1=a-(ax_0+by_0)q_1=a(1-x_0q_1)+b(-y_0q_1)\in S$，*同理* $r_2\in S$，

若 $r_1\neq 0$，*則* d_0 *不為* S *中的最小元素，矛盾，所以* $r_1=r_2=0$。

$\Rightarrow d_0\,|\,a, d_0\,|\,b$，$\Rightarrow d_0\,|\,d$

所以 $d=d_0$ *，亦即* $ax_0+by_0=(a,b)$ 。　　QED.

定理 2 有時會稱為最大公因數表現定理，也就是兩個數的最大公因數可用這兩個數的整數線性組合表現出來。

這個存在性定理告訴對我們解的存在性，讓我們在未想辦法求解之前就可了解方程式的解是否存在，但至於如何求解，它就沒有告訴我們。但是輾轉相除法原理告訴我們，兩個數的最大公因數可利用除法來求得，因此我們在下面舉個例子來說明，如何利用輾轉相除法求一組 (x_0,y_0) 。

例 1. 求一組整數解 (x_0,y_0) ，滿足 $3172x_0+2257y_0=(3172,2257)$ 。
解：

a	3172	2257	b
b	2257	1830	$2(a-b)$
$a-b$	915	427	$-2a+3b$
$-a+2b$	854	427	$21a-28b$
$-4a+6b$	61	0	

在上式中，我們令 $a=3172, b=2257$ ，所以在 3172 及 2257 旁分別寫上 a 與 b 。開始作輾轉相除法，首先 3172 除以 2257 中，餘數為 915，因為 $b=2257$ 所以 915=3172−2257= $a-b$，因此在 915 旁寫上 $a-b$；接著 2257 除以 915，得餘數為 $427=2257-2\times 915=b-2(a-b)=-2a+3b$ ，餘此類推。最後可得 $-4a+6b=61$，此即 $3172\times(-4)+2257\times 6=61$，所以(−4, 6)為其一組解。

找到了一組解，當然了就出現一個問題，方程式是否還有其他解？如果有，這些解有沒有一般式呢？下面這個定理就告訴我們答案：

定理 3： 設數對 (x_0,y_0) 為方程式 $ax+by=c$ 的一組整數解，則其通解為

$$\begin{cases} x=x_0-\dfrac{b}{(a,b)}t \\ y=y_0+\dfrac{a}{(a,b)}t \end{cases}, t\in Z$$

，其中 (a,b) 表 a,b 的最大公因數。

證明：設 $(a,b)=d$ ， $a=dh, b=dk$ ，則 $(h,k)=1$，
因為 $ax_0+by_0=c$ ，所以兩式相減得 $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ ，
即 $a(x-x_0)=-b(y-y_0)$ 。同除以 d 可得
$h(x-x_0)=-k(y-y_0)$ ，

因為$(h,k)=1$，所以$h\mid(y-y_0)$，可假設$y-y_0=ht$，則$x-x_0=-kt$，因此$x=x_0-kt,\ y=y_0ht$。 QED.

另外，如果把$ax+by=c$看成坐標平面上的一直線，(x_0,y_0)為其通過的一點，則此直線的參數式為$\begin{cases}x=x_0+bt\\ y=y_0-at\end{cases},t\in R$。如果我們希望$(x,y)$為整數點，因為$(x_0,y_0)$為整數點，所以$bt\in Z,\ at\in Z$。可以注意到$t$必為無理數，也就是說$t$必為分數形式。設$t=\dfrac{q}{p},\ p,q\in Z,(p,q)=1$，則$p\mid b,\ p\mid a$，所以$p\mid(a,b)$，而與$(x_0,y_0)$最靠近的整數點為$(x_0\pm\dfrac{b}{(a,b)},\ y_0\mp\dfrac{a}{(a,b)})$，因此其整數點的參數式為

$$\begin{cases}x=x_0+\dfrac{b}{(a,b)}t\\ y=y_0-\dfrac{a}{(a,b)}t\end{cases},\ t\in Z。$$

最後，我們利用求整數解的方法來解一個剩餘問題：

設n為自然數，且n除以 7 餘 3，除以 5 餘 2，除以 9 餘 4，求n？

解：設$n=7q_1+3=5q_2+2=9q_3+4$，由$7q_1+3=5q_2+2$，得$7q_1-5q_2=-1$。很簡單可看出$q_1=2,q_2=3$為其一組整數解，所以其通解為

$q_1=5t+2,\ q_2=7t+3$，代入可得$n=35t+17=9q_3+4$。

此即$35t-9q_3=-13$。

因為$35\times1-9\times4=-1$，所以$35\times13-9\times52=-13$，即$t=13,\ q_3=52$為其一組整數解，所以其通解為$t=9k+13,\ q_3=35k+52$，代入可得$n=315k+472$，其中k為任意整數。 QED.

到這裡，我們已經將最基本的二元一次方程式的整數解問題介紹完畢，而對於三元一次方程式或多元一次方程式，其處理方式事實上是類似的，以後有機會再另行介紹。